Akademia Górniczo - Hutnicza imienia Stanisława Staszica Wydział Matematyki Stosowanej

Vsevolod Vladimirov

Modelowanie w pakiecie Mathematica Część I. Układy o parametrach skupionych

Kraków, grudzień 2016

I. Wstęp

Określając przedmiot modelowania i jego rolę w poznawaniu rzeczywistości, warto by zacząć od tego, że jest ono uprawiane we wszystkich działach teoretycznych nauk przyrodniczych. Dotychczasowy rozwój nauki, a w szczególności fizyki, utwierdza nas w przekonaniu iż każde prawo empiryczne jest prawem przybliżonym, posiadającym ograniczony zakres stosowalności, zaś praca teoretyka polega na konstrukcji modelu matematycznego, który następnie jest badany za pomocą odpowiednich narzędzi. A więc de facto przedmiotem badań teoretycznych nigdy nie jest zjawisko jako takie, lecz mniej lub bardziej dokładne jego przybliżenie przedstawione jako model matematyczny. Proces tworzenia modelu nie jest jednoznaczny, zaś sztuka modelowania polega na znajdowaniu kompromisu pomędzy ścisłością a prostotą opisu matematycznego. A. Einstein wypowiedział to, mając na myśli teorię fizyczną iż "...wszystko powinno w niej zostać uproszczone tak bardzo, jak to tylko możliwe, *ale nie bardziej*." Podobnie jest w innych dziedzinach wiedzy: użyteczny model uwzględnia najważniejsze cechy badanego zjawiska, pomijając cechy mniej istotne, dzięki czemu jest on na tyle prosty, że można go dokładnie przeanalizować. Warto zaznaczyć iż bogactwo, poprawność oraz użyteczność modelu (teorii) jest uwarunkowana takimi czynnikami, jak

- odpowiedniość danym empirycznym;

-zgodność z prawami fundamentalnymi z zakresu danej dziedziny wiedzy;

- niesprzeczność wewnętrzna;

-możliwość wyciągania nowych wniosków.

Wnioski teoretyczne, z kolei, maja być zgodne z danymi doświadczalnymi.

Ogólne relacje pomiędzy zjawiskiem a tworzeniem właściwego modelu można ująć w postaci

schematu:



Rys. 1.1. Relacje pomiędzy modelem a doświadczeniem

W związku z tym co było powiedziane, nasuwa się pytanie: skoro przedstawiciele wszystkich

nauk przyrodniczych (a nawet spolecznych) zajmują się konstruowaniem oraz badaniem modeli, to czy ma sens wyszczególnienie **modelowania** jako odrębnej dyscypliny? Otóż można przytoczyć wiele względów uzasadniających takie postępowanie. Niektóre argumenty przedstawione są nizej.

• Modele matematyczne są uniwersalne i nie zależą, a od treści wkładanych w nie przedstawicielami

poszczegolnych dziedzin nauki.

Przykład: równanie

 $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$ (1.1)

opisuje małe drgania wahadła matematycznego w polu grawitacyjnym jak również drgania prądu w obwodzie elektrycznym (p. rys. 1.2)



Rys. 1.2. Dwa różne zjawiska fizyczne opisywane przez model (1.1)

Nieliniowe modele ewolucyjne posiadaja uniwersalne cechy charakterystyczne, tak, na przykład, duza ilość modeli zapisanych w postaci wielowymiarowych ukladów dynamicznych przy pewnych wartościach parametrów demonstruje cechy chaotyczne.
 Scenariusze przejścia do chaosu w takich układach posiadają charakter uniwersalny.

• Modele mające charakter nieliniowych równań cząstkowych bardzo często opisują stabilne **ruchy koherencyjne** ośrodka, przybierające kształt uosobnionych fali nieliniowych, poruszających się frontów czy oscylacji. Rozwiązania takiego typu, które są bardzo ważne z punktu widzenia zastosowań, mają szereg wspólnych cech i są badane za pomocą uniwersalnych narzędzi matematycznych.

• Przedmiot modelowania nie stawia na celu rozwiąznie konkretnego zagadnienia teoretyznego i, dzięki temu, pozwala spojrzeć na rozmaite modele z bardziej ogólnych pozycji, dostrzec ich wspólne powtarzające się cechy.

Celem przedmiotu więc jest pozyskanie informacji o modelach, badanie ich wspólnych cech charakterystycznych, typowych rozwiązań, własności asymptotycznych, zależności od parametrów,

utraty gładkości rozwiązań w trakcie ewolucji czasowej, bifurkacji, i t.p.

W kursie tym będą zaprezentowane:

(a) modele zjawisk przyrodniczych które dopuszczają opis w postaci równań różniczkowych i różnicowych;

(b) sposoby badań tych modeli, między innymi:

(b-1) poszukiwanie rozwiązań analitycznych;

(b-2) rozwiązania numeryczne;

(b-3) anliza jakościowa;

(c) na przykładzie konkretnych układów równań zwyczajnych będą omówione modele deterministyczne opisujące oscylacje nieliniowe i chaotyczne, kryteria chaotyczności, scenariusze przejścia do chaosu oraz analogiczne zjawiska opisywane równaniami różnicowymi;

(e) będą zaprezentowane podstawowe typy równań ewolucyjnych: liniowe równanie transportu ciepła oraz liniowe równanie falowe, po czym będą analizowane ich nieliniowe odpowiedniki opisujące struktury i fale nieliniowe, czyli rozwiązania ewolucjonujące w trybie samopodobnym. W przypadku struktur zlokalzowanych, czyli takich, których nośnik przestrzenny (ogólnie rzecz biorąc, istotnie niezerowa część rozwiązania) jest zwarty, będą również omawiane oddziaływania struktur między sobą.

Ponieważ rozpatrywane będą głównie modele nieliniowe, więc rozwiązania dokładne będą odgrywać tu raczej niewielką rolę. Ich miejsce zajmie analiza jakościowa układów dynamicznych oraz badania numeryczne. Pakiet *Mathematica* był od początku tworzony dla celów modelowania. Jest on prawie idealnym narzędziem gdyż mieści dużą ilość gotowych procedur umozliwiających analizę, łatwo w nim się przechodzi od wzoró analitycznych do schematów numerycznych. Wykorzystanie instrumentów oraz narzędzi graficznych pakietu *Mathematica* umożliwia przedstawienie podstawowych idei dynamiki nieliniowej w dostępnej formie.

2. Układy o parametrach skupionych

2.1. Wstęp

Rozrózniamy układy materialne o parametrach skupionych oraz układy o parametrach rozłożonych. Jezeli rozmiary obiektów należących do badanego układu są znikome w porównaniu ze średnimi odległościami pomiędzy poszczególnymi obiektami, lub jeżeli opis dotyczy przemieszczenia obiektu w przestrzeni, a jego kształty nie wywierają istotnego wpływu na ten proces, wówczas mówimy o układzie o parametrach skupionych.

Przykłady układów o parametrach skupionych: wahadło; ciało w polu grawitacyjnym Ziemi; obwody elektryczne.

Przykłady układów o parametrach rozłożonych: ośrodki płynne, gazowe czy ciało stałe w sytuacji gdy opis dotyczy przemieszczenia masy (w ośrodku płynnym lub gazowym), transportu ciepła (w ośrodku przewodzącym), czy propagacja fali (w ośrodku sprężystym).

Modelami układów o parametrach skupionych najczęściej są równaia różniczkowe zwyczajne. Układy o parametrach rozłożonych modeluje się za pomocą równań różniczkowych cząstkowych. Niniejszy rozdział poswięcony jest układom o parametrach skupionych.

2.2. Przykłady modeli o parametrach skupionych.

2.2.1. Model maltuzjański i model logistyczny.

W bardzo wyidealizowanym modelu maltuzjańskim, opisującym na przykład rozwój populacji bakterii, wielkością poszukiwaną jest liczebność populacji P(t). Zakłada się że baza pokarmowa jest nieograniczona i nie ma czynników hamujących wzrost. W takiej sytuacji można założyć iż szybkość zmiany populacji jest proporcjonalna do wielkości populacji, czyli zachodzi równanie

$$\frac{dP(t)}{dt} = r P(t), \qquad (2.2.1)$$

gdzie *r* jest współczynnikiem odtwarzalności, który w najprostszym przypadku jest odwrotnie proporcjonalny do średniego okresu reprodukcji. Dodając do tego warunek początkowy $P(0) = P_0 > 0$, otrzymamy rozwiązanie

$$P(t) = P_0 e^{rt} . (2.2.2)$$

Ze względu na prostotę rozwiązania, łatwo możemy wyciagnąć z niego pewne wnioski. Otóż załóżmy iż P(t) opisuje popujację bakterii jednokomórkowych i że w sprzyjajacych okolicznościach (umiarkowana temperatura stała, obfitość bazy pokarmowej, i t.p., każda bakteria dzieli się średnio co 20 minut. Załóżmy także iż proces rozpoczął się od dzielenia się jednej bakterii, czyli że P_0 =1. Wtedy rozwiązanie będzie określone wzorem $P(t) = e^{\frac{t}{1200}}$, gdzie t - czas wyrażony w sekundach. Można przyjąć że rozmiar liniowy komórki wynosi 10⁻⁶ m, wtedy objętość zajmowana przez bakterię będzie rzędu 10⁻¹⁸m³. Zadajmy pytanie: ile wynosi czas T potrzebny by populacja bakterii rozwijająca się zgodnie ze scenariuszem maltuzjańskim pokryła powierzchnię Ziemi **warstwą metrową**? Promień Ziemi w przybliżeniu równy jest 6400 10³ m, więc czas można otrzymać rozwiązując równanie

$$4 \pi \left(6400 * 10^3 \right)^2 = 10^{-18} e^{\frac{T}{1200}}.$$

Odpowiedź (w godzinach) wynosi:

$$\frac{N[\log[4\pi (6400 * 10^3)^2 * 10^{18}] * 1200 / 3600]}{25.1071}$$

Obrachunki przeprowadzone w pakiecie *Mathematica* pokazują że T≈25 godzin, czyli zdarzy się to na początku następnej doby licząc od chwili rozpoczęcia dzielenia się jednejjedynej komórki. Wniosek ten jest, oczywiście, absurdalny, chociaż czas generacji następnych pokoleń u niektórych bakterii rzeczywiście wynosi od 20 do 40 minut. Przyczyna kompletnej niezgodności modelu maltuzjańskiego z rzeczywistymi obserwacjami tkwi oczywiście w tym, że model maltuzjański w żaden sposób nie uwzględnia skończoności zasobów pokarmowych. Nie uwzględnia on również tego, że stałe i szybkie rozmnażanie się możliwe jest w wąskim przedziale temperaturowym i przy pełnym braku czynników powodujących wymieranie populacji.

Bardziej realistyczny model uwzględniający skończoność obszaru który moze zajmować populacja ma postać

$$\frac{dP(t)}{dt} = r P(t) \frac{K - P(t)}{K},$$

gdzie K jest liczbą stałą zwaną pojemnością obszaru. Wprowadzając nową zmienną N(t)=P(t)/K oraz nowy parametr $\lambda=r/K$, otrzymamy standardowe równanie logistyczne

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N (1 - N).$$

(2.2.3) Zakładając dodatkowo że $N(0) = N_0$, otrzymamy rozwiązanie

$$N(t) = \frac{N_0 e^{t\lambda}}{1 + N_0 (e^{t\lambda} - 1)},$$

które, niezależnie od przyjętych warunków początkowych, dąży asymptotycznie do jedynki, p. rys. 2.1:



Rys. 2.1. Rozwiązania równania logistycznego przy różnych warunkacj początkowych

2.2.2. Analogi dyskretne równania logisytcznego.

Analog dyskretny równania (2.2.3) można otrzymać na różne sposoby. Pierwszy sposób który tu omówimy polega na przejściu od równania rózniczkowego do odpowiedniego równania różnicowego:

$$\frac{N_{m+1}-N_m}{\Delta t} = \lambda N_m (1-N_m) \tag{2.2.4}$$

Równanie to można przedstawić w postaci

$$N_{m+1} = (1+\lambda \Delta t) N_m - \lambda \Delta t N_m^2. \qquad (2.2.5)$$

Zakładamy że $0 < \lambda \Delta t \ll 1$, a więc parametr r jest nieco większy od jedynki. Przy takim założeniu rozwiązanie numeryczne równania różnicowego (2.2.5) jest bardzo bliskie do rozwiązania analitycznego równania (2.2.3), p. rys. 2.2.



Rys. 2.2. Rozwiazanie analityczne równania (2.2.3) uzyskane przy λ =1, N_0 = 0.05 (linia ciągła) oraz punkty rozwiązania numerycznego równania (2.2.5) po odpowiednim przeskalowanemu

Wprowadzając skalowanie $N_m = \alpha Y_m$ i kładąc $\alpha = (1+\lambda \Delta t)/(\lambda \Delta t)$, można otrzymać z (2.2.5) standardową postać równania logistycznego:

$$Y_{m+1} = r Y_m (1 - Y_m), gdzie r = I + \lambda \Delta t.$$
 (2.2.6)

Dyskretne odwzorowanie logistyczne pojawia się nie tylko w wyniku dyskretyzacji modelu różniczkowego. Rozpatrzmy następujące zagadnienie o oszczędnościach bankowych (Peitrgen, Richter, 1984). Wkład pieniężny z_0 rośnie w sposób następujący:

$$z_{n+1} = (1 + \varepsilon) z_n = \dots = (1 + \varepsilon)^{n+1} z_0,$$

gdzie parametr ε jest procentem wzrostu kapitału w określonym czasie (kwota może wzrastać raz w roku, raz w miesiącu, etc., w zależności od warunków wkładu). Chcąc zapobiec hipreinflacji, politycy mogli by zgłosić projekt ustawy zgodnie z któym procent powinien maleć wraz ze wzrostem kapitału, co będzie zapewnione gdy, na przykład, zamienić procent wzrostu kapitału w następujący sposób: $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0(1 - z_n/z_{max})$. Wówczas konto bankowe zmienało by się według wzoru

 $z_{n+1} = [1 + \varepsilon_0 (1 - z_n / z_{\text{max}})] z_n.$

Wprowadzając skalowanie $x_n = \alpha z_n$ gdzie $\alpha = \frac{(1+\varepsilon_0) z_{\text{max}}}{\varepsilon_0}$, znów otrzymamy postać standardową równania logistycznego:

$$x_{m+1} = r x_m (1 - x_m), \quad r = 1 + \varepsilon_0$$

Na podstawie analizy równania (2.2.3) i jego analoga numerycznego mogło by się wydawać, iż zaproponowany mechanizm będzie prowadzić do stabiizacji wkładu. Zauważmy jednak, ze w danym przypadku nie ma powodu przypuszczać że $\varepsilon_0 <<1$, gdyż w okresie hiperinflacji stawki procentowe mogą być bardzo wysokie. Natomias symulacje numeryczne pokazują że w sytuacji gdy $r \in (3, 4)$ rozwiązanie kardynalnie się różni od tego, co się działo przy r bliskich do jedynki, rys. 2.3.





Rys. 2.3. Wykresy odwzorowania logistycznego otrzymanego przy $x_0 = 0.05$ i różnych wartościach parametru *r*.

2.2.3. Równanie wahadła matematycznego (wprost z równania Newtona).

Postawienie zagadnienia jest następujące: punkt materialny o masie *m*, podwieszony na nieważkiej nierozciągliwej nici długości *L*, wykonuje ruchy płaskie w polu grawitacyjnym (p. rys. 2.4).



Rys. 2.4.

Współrzędne wahadła wyrażają się wzorami

 $X = L \cos[\alpha], \quad Y = L \sin[\alpha]. \quad (2.2.7)$

Na punkt materialny działają dwie siły: siła grawitacyjna m \vec{g} skierowana wzdłuż osi OX oraz siła naciągu nici T. Wykorzystując drugie prawo Newtona, wypiszemy równania ruchu we współrzędnych X, Y:

 $m \ddot{X} = m g - T \operatorname{Cos}[\alpha], \quad m \ddot{Y} = -T \operatorname{Sin}[\alpha].$ (2.2.8)

Różniczkując dwa razy wzory (2.2.7) względem czasu i podstawiając wynik do (2.2.8), otrzymamy układ

-m L ($\ddot{\alpha}$ Sin[α]+ $\dot{\alpha}^2$ Cos[α])=m g- T Cos[α],

m L ($\ddot{\alpha}$ Cos[α]- $\dot{\alpha}^2$ Sin[α])=- T Sin[α].

Przemnożymy pierwsze równanie przez $-Sin[\alpha]$, a drugie równanie przez $Cos[\alpha]$. Dodając stronami przemnożone równania, otrzymamy, po elementarnych przekształceniach,

równanie

 $\ddot{\alpha} + \Omega^2 \operatorname{Sin}[\alpha] = 0, \qquad (2.2.9)$

gdzie $\Omega = \sqrt{g/L}$.

2.3. Formalizm Lagrange'a

Położenie punktu materialnego w przestrzeni jest jednoznacznie określone, jeżeli znana jest zależność od czasu trzech współrzędych kartezjańskich {x[t], y[t], z[t]}. Jeżeli punktów jest N, wowczas pełną informację o układzie daje znajomość 3 N wielkości { x_i [t], y_i [t], z_i [t]}, i=1,2,...N. W ogólnym przypadku liczbę *s* niezależnych wielkości, których znajomość jest konieczna do określenia położenia uklądu w dowolnej chwili czasu, nazywamy *liczbą stopni swobody*.

Oczywistym jest to, że od s zmiennych kartezjańskich można przejść za pomocą dyfeomorfizmu do innej rodziny zmiennych (q_1 , q_s), uzyskując w ten sposób **opis równoważny**. Liczbę *s* dowolnych zmiennych charakteryzujących całkowicie położenie układu nazywamy *współrzędnymi uogólnionymi*, zaś pochodne \dot{q}_i - *prędkościami uogólnionymi*. W celu wyprowadzenia równań ruchu układów mechanicznych wykorzystuje się *zasada najmniejszego działana*. W myśł tej zasady każdy układ o *s* stopniach swobody jest scharakteryzowany przez pewną funkcję

 $L(q_1, ..., q_s, \dot{q_1}, ..., \dot{q_s}, t),$

zwaną funkcją Lagrange'a (lub lagranżjanem). Oznaczmy ją krótko przez $L(q, \dot{q}, t)$. Przypuśćmy że w chwili początkowej t_0 układ znajduje się w położeniu scharakteryzowanym przez parametry q_0 , \dot{q}_0 , natomiast w chwili końcowej t_1 – przez parametry q_1 , \dot{q}_1 . Połączyć te dwie konfiguracje krzywymi sparametryzowanymi można, oczywiście, na nieskńczenie wiele sposobów. Zasada najmniejszego dzialania (zwana także **zasadą Hamiltona**) mówi że rozwiązania które poprawnie opisują dynamikę układu mechanicznego są to funkcjie q[t], $\dot{q}[t]$, na których całka działania

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) \, dt \tag{2.3.1}$$

osiąga minimum. Posługując się względami symetrii, można pokazać, iż

$$L(q, \dot{q}, t) = T-U,$$
 (2.3.2)

gdzie T - całkowita energia kinetyczna układu, U - całkowita energia potencjalna ukladu. Obie funkcje mogą być wyrażone w *dowolnych* współrzędnych uogólnionych. Zasadę najmniejszego działania stwierdza, że jeśli q(t) jest "prawdziwą" trajektorią układu, natomiast y(t)=q (t)+ δ q (t) jest jakąkolwiek trajektorią zaburzoną, p. rys. 2.5, leżącą w bliskim sąsiedztwie trajektorii wyjściowej ("w bliskim sąsiedztwie" oznacza że $\| \delta q \| \le 1$ w pewnej normie funkcyjnej), wówczas zachodzi nierówność

$$\int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) \, dt \leq \int_{t_0}^{t_1} L(y, \dot{y}, t) \, dt.$$

Powyższa nierówność, wraz ze znajomością lagranżjanu, pozwala uzyskać równania rządzące ruchem układu cząstek, zachodzi bowiem



Rys. 2. 5. Czerwona linia - q(t); niebiska linia przerywana - $q(t)+\delta q(t)$

Twierdzenie 2.3.1. Trajektoria q (t) realizuje ekstremum funkcjonału (2.3.1) wtedy, gdy jest spełniony układ równań

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}}\right) = 0, \quad \text{i-1,2,...s.}$$
 (2.3.3)

Dowód. Przypuśćmy że zaburza się i - ta zmienna uogólniona:

$$y=(q_1, \dots, q_{i-1}, q_i + \delta q_i, q_{i+1,\dots}, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{i-1}, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, \dot{q}_{i+1,\dots}, \dot{q}_s).$$

Ograniczamy się zaburzeniami, które zerują się na końcach odcinka:

$$\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = \delta \dot{q}_i(t_0) = \delta \dot{q}_i(t_1).$$

Zauważmy ponadto że $\delta \dot{q}_i(t) = \frac{d}{dt} \delta q_i(t)$. Podobnie jak w rachunku funcji jednej zmiennej, warunkiem konicznym ekstremum funkcjonału jest znikanie członu rzędu pireszego względem δq_i wariacji całki dzialania. Z dokladnością do $(O(|| \delta q_i ||)$ wariacja wyraża się następująco:

$$\begin{split} \delta \, \mathbf{S} &= \int_{t_0}^{t_1} \{ L(q_1, \ \dots q_i + \delta \ q_i, \ \dots q_s, \ \dot{q}_1, \ \dots \dot{q}_i + \delta \ \dot{q}_i, \ \dots \dot{q}_s \ t) - \\ & L(q_1, \ \dots q_i + \delta \ q_i, \ \dots q_s, \ \dot{q}_1, \ \dots \dot{q}_i + \delta \ \dot{q}_i, \ \dots \dot{q}_s \ t) \} \ dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \{ \frac{\partial}{\partial \ q_i} L(q, \ \dot{q}, \ t) \ \delta \ q_i \ + \frac{\partial}{\partial \ \dot{q}_i} L(q, \ \dot{q}, \ t) \ \delta \ \dot{q}_i \} \ dt = \frac{\partial}{\partial \ \dot{q}_i} L(q, \ \dot{q}, \ t) \ \delta \ q_i \ |_{t_0}^{t_1} + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \{ \frac{\partial}{\partial \ q_i} L(q, \ \dot{q}, \ t) \ - \frac{d}{d \ t} \ \frac{\partial}{\partial \ \dot{q}_i} L(q, \ \dot{q}, \ t) \} \ \delta \ q_i \ dt \,. \end{split}$$

Ze względu na zerowanie się wariacji na końcach odcinka $\langle t_0, t_1 \rangle$, pierwszy człon w ostatniej równości jest tozsamościowo równy zeru. Ponieważ wariacja δq_i , jest dowolna, człon rzędu pierwszego będzie równy zeru wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażanie w wyrazach klamrowej w ostatniej całce zeruje się w każdym punkcie odcinka $\langle t_0, t_1 \rangle$.

Zastosujmy zasadę najmniejszego działania do otrzymania równania ruchu wahadła matematycznego (p. rys. 2.4). Energia kinetyczna wahadła wyraża się wzorem

T=
$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{mL^2}{2} \dot{\alpha}^2 (\sin^2[\alpha] + \cos^2[\alpha]) = \frac{mL^2}{2} \dot{\alpha}^2.$$

Energia potencjalna równa jest

U=m g h= m g L(1-Cos[α]).

Stosując wzór (2.3.3) do wyrażenia

$$L = \frac{mL^2}{2} \dot{\alpha}^2 - m g L(1 - Cos[\alpha])$$

otrzymamy:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_i}\right) = - \text{m g L Sin}[\alpha] - \text{m } L^2 \ddot{\alpha} = -\text{m } L^2 (\ddot{\alpha} + \frac{g}{L} \text{Sin}[\alpha]) = 0.$$

Uzyskany wynik pokrywa się z tym, który otrzymaliśmy wcześniej na podstawie równań Newtona (por. z (2.2.9)).

2.4. Przykłady pozyskiwania równań dynamiki za pomocą formalizmu Lagrange'a

Wahadłem podwójnym nazywa się układ dwóch punktów materialnych z których pierwszy, o masie m_1 podwieszony jest na nieważkim nierozciągliwym rdzeniu długości L_1 , natomiast drugi punkt materialny o masie m_2 jest przymocowany do pierwszego za pomocą nieważkiego nierozciagliwego rdzenia długości L_2 (p. rys. 2.6). Na obie masy działa siła ciężkości skierowana w dół. Zakłada się ponadto, że ruch obu wahadeł odbywa się w jednej płaszczyźnie.



Rys. 2.6. Wahadło podwójne

Obliczamy współrzędne przedstawione na rys. 2.6:

 $x_1 = L_1 \operatorname{Cos}[\alpha], \qquad y_1 = L_1 \operatorname{Sin}[\alpha],$

$$x_2 = x_1 + L_2 \cos[\beta], \qquad y_2 = y_1 + L_2 \sin[\beta].$$

Stąd wyliczamy prędkości punktów materialnych:

$$v_1^2 = \dot{\alpha}^2 L_1^2, \qquad v_2^2 = \dot{\alpha}^2 L_1^2 + \dot{\beta}^2 L_2^2 + 2 \, \dot{\alpha} \, \dot{\beta} L_1 L_2 \cos[\beta - \alpha].$$

Sumaryczna energia kinetyczna układu wyraża się wzorem L = T - U, gdzie

$$T = \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 L_1^2(m_1 + m_2) + \frac{1}{2} \dot{\beta}^2 L_2^2 m_2 + m_2 \dot{\alpha} \dot{\beta} L_1 L_2 \cos[\beta - \alpha],$$
$$U = (m_1 + m_2) g L_1 (1 - \cos[\alpha]) + m_2 g L_2 (1 - \cos[\beta]).$$

Wykorzystując wzór(2.2.9), otrzymujemy równania ruchu w postaci:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{L_1}\operatorname{Sin}[\alpha] + \frac{m_2 L_2}{(m_1 + m_1)L_1} \left\{ \ddot{\beta} \operatorname{Cos}[\beta - \alpha] + \dot{\beta}^2 \operatorname{Sin}[\beta - \alpha] \right\} = 0, \quad (2.4.1)$$

$$\ddot{\beta} + \frac{g}{L_2}\operatorname{Sin}[\beta] + \frac{L_1}{L_2}\left\{\ddot{\alpha}\operatorname{Cos}[\beta - \alpha] - \dot{\alpha}^2\operatorname{Sin}[\beta - \alpha]\right\} = 0.$$

ZADANIA

(wahadło sferyczne - Enns, Problem 2-7, s. 44; wahadło potrójne; płaskie wahadło (Ldługość, m_2 - masa) zawieszone na punkcie mater. o masie m_1 mogącej się poruszać po prostej poziomej - Landau, s. 20, rys. 2; Enns example 1-2, s. 23; Enns Problem 2-10, s. 45 z gwiazdką)

2.5. Układy dynamiczne. Kalsyfikacja punktów stacjonarnych na płaszczyźnie

Każdy układ równań zwyczajnych za pomocą zamiany zmiennych mozna przedstawić w postaci układu *n* równań rózniczkowych rzędu pierwsego:

$$\frac{dx_m}{dt} = F_m(x_1, x_2, \dots x_n; t), \qquad m = 1, 2, \dots n.$$
(2.5.1)

W przypadku gdy funkcje F_m nie zależą w sposób jawny od zmiennej t mówimy że (1.3.1) jest autonomicznym układem dynamicznym.

Niżej przedstawiamy go w postaci wektorowej:

$$\frac{dX}{dt} = F(X), \qquad X \in \mathbb{R}^n \quad F : \ U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \ . \tag{2.5.2}$$

W poprzednich podpunktach zetknęliśmy się z przykładami równań dynamiki punktów materialnych, które można rozwiązać jedynie za pomocą metod numerycznych. Alternatywą tym metodom jest analiza jakościowa, która może być skutecnie zastosowana do pewnych klas autonomicznych układów dynamicznych. W ramach tej teorii nie stawia się za zadanie odnajdywanie rozwiązań dokladnych, gdyż w przypadku nieliniowych układów równań jest ono w większości przypadków nierealizowalne. Zamiast tego usiłuje się spojrzeć z jednolitego punktu widzenia na zbiór możliwych rozwiązań danego ukłądu, przedstawiając analizę ich zachowania się na podstawie znajomości funkcji F_m . Analiza jakościowa, w ujęciu przedstawianym w tym skrypcie, w dużej mierze jest oparta na obrazach geometrycznych rozwiązań. Posiada ona swoisty język, dlatego wprowadzamy na samym początku pewne niezbędne pojęcia i oznaczenia.

Definicja. Punkt $X_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) \in \mathbb{R}^n$ nazywa się punktem stacjonarnym układu (2.5.2), jeżeli $F_i(X_0) = 0$, i=1,...n.

W małym otoczeniu punktu stacjonarnego często można zastąpić pełny układ (2.5.2) jego *linearyzacją*. Rozpatrzmy

prawą stronę tego układu. Każdą funkcję $F_i(X)$ w otoczeniu punktu X_0 można przedstawić w postaci

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_k} (X_0) (x_k - x_{k0}) + O(\xi^2), \ \xi^2 = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k0})^2.$$

Zatem układ dynamiczny w otoczenui punktu stacjonarnego X_0 z dokładnością do $O(\xi^2)$ da się przedstawić w postaci

$$\frac{d\xi}{dt} = \hat{M}\,\xi,\tag{2.5.3}$$

gdzie \hat{M} - macierz *nxn* o elementach macierzowych

$$\hat{M}_{ik} = \frac{\partial F_i}{\partial x_k} (X_0), \ \xi = (\xi_1, \ \xi_2, \ \dots \xi_n)^{tr}, \ \xi_k = x_k - x_{k0}.$$

Oznaczenie. Układ (2.5.3) nazywa się linearyzacją układu dynamicznego (2.5.2) w otoczenui punktu

stacjonarnego X_0 . Okazuje się że przy pewnych warunkach rozwiązania układu (2.5.2) oraz rozwiąznia układu liniowego (2.5.3) w małym otoczeniu punktu stacjonarnego są ''jakościowo identyczne''.

Ponieważ rozwiązywać (analizować) układ liniowy na ogół jest niezmiernie prościej niż układ pełny, opłaca się określić

warunki umożliwiające taką podmianę. To, czy zachowanie pełnego układu w otoczeniu punktu stacjonarnego rzeczywiście jest

reprezentowane przez jego linearyzację zależey od wartości własnych macierzy \hat{M} . Przeanalizujemy to na przykładzie układu w R^2 , podając przy okazji klasyfikację prostych punktów stacjonarnych.

Rozpatrzmy zatem układ równań

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} = \hat{M}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}.$$
 (2.5.4)

Oznaczenie. Zbiór zmiennych $(\xi, \eta)^{tr} \in R^2$ nazywamy płaszczyzną fazową układu (2.5.4).

Portretem fazowym układu (2.5.4) nazywamy zbiór krzywych sparametryzowanych ($\xi[t], \eta[t]$), $t \in I \epsilon \mathbb{R}$, które

tworzą rozwiązania tego układu.

Posługując się terminologią zapożyczoną w mechanice punktu materialnego, krzywe

sparametryzowane (ξ [t], η [t]) nazywają też **trajektoriami, trajektoriami fazowymi** lub **orbitami układu.**

Przystępujemy do klasyfikacji punktów stacjonarnych układu (1.3.4).

1. Przypadek gdy wartości własne λ_1, λ_2 macierzy \hat{M} są rzeczywiste, różne, dotatnie.

Niech, na przykłąd, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. wtedy punkt (0, 0) przestrzeni

fazowej nazywa się źródłem. Wówczas da się określić taką nieosobliwąwą zamianę zmiennych

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

że układ przybierze postać

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1\\ y_2 \end{pmatrix}.$$
 (2.5.5)

Rozwiązaniem układu (1.3.5) sa funkcje

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

W przypadku gdy $C_1 \neq 0$, rozwiązanie to można przedstawić w postaci

$$y_{2} = C_{3} y_{1}^{\frac{\lambda_{2}}{\lambda_{1}}}, \qquad C_{3} = C_{2} \left\{ \begin{array}{c} 1 / (C_{1})^{\frac{\lambda_{2}}{\lambda_{1}}} & \text{gdy } C_{1} > 0, \\ -1 / |C_{1}|^{\frac{\lambda_{2}}{\lambda_{1}}} & \text{gdy } C_{1} < 0. \end{array} \right.$$
(2.5.6)

Portret fazowy układu (2.5.5) w tym przypadku wygląda tak, jak to jest pokazane na rys. 2.7.



Rys. 2.7. Węzeł niestabilny (źródłó)

Zwrocmy uwagę na to że osie współrzędnych są trajektoriami fazowymi układu. Oś pozioma

odpowiada przypadku $C_2 = 0$; oś pionowa odpowiada przypadku osobliwemu $C_2 = 0$. Te dwie trajektorie fazowe nie mogą być wyrażone wzorem (2.5.6).

2. Wartości własne λ_1, λ_2 macierzy *M* są rzeczywiste, różne, ujemne. Niech dla określoności $0 > \lambda_1 > \lambda_2$. W tym przypadku punkt (0, 0) przestrzeni fazowej nazywa się zlewem. Jak i w poprzednim przypadku, istnieje liniowa zamiana zmiennych $(\xi, \eta) \rightarrow (y_1, y_2)$ taka że w nowych zmiennych układ (2.5.4) ma postać formalnie identyczną z (2.5.5).

Punkt stacjonarny w tym przypadku nazywa się węzłem stabilnym lub zlewem. Portret fazowy w otoczeniu takiego punktu różni się od poprzedniego tylko kierunkiem ruchu wzdłuż trajektorii, p. rys. 2.8.



Rys. 2.8. Węzeł stabilny (zlew)

3. Wartości własne λ_1, λ_2 macierzy *M* są rzeczywiste, niezerowe i mają różne znaki. Niech dla określoności $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$.

W tym przypadku punkt (0, 0) przestrzeni fazowej nazywa się siodłem. Istnieje liniowa zamiana zmiennych (ξ , η) \rightarrow (y_1 , y_2) taka że w nowym zmiennych układ (2.5.4) przybiera postać (2.5.5).

Para niezależnyc rozwiązań tego układu mozna przedstawić w postaci

 $y_1 = C_1 e^{|\lambda_1|t}, \quad y_2 = C_2 e^{-|\lambda_2|t},$

W przypadku gdy $C_1 \neq 0$, rozwiązanie można też przedstawić w postaci

$$y_{2} = C_{3} y_{1}^{-|\lambda_{2}/\lambda_{1}|}, \quad C_{3} = C_{2} \quad \left\{ \begin{array}{c} 1 / (C_{1})^{\frac{\lambda_{2}}{\lambda_{1}}} & \text{gdy } C_{1} > 0, \\ -1 / |C_{1}|^{\frac{\lambda_{2}}{\lambda_{1}}} & \text{gdy } C_{1} < 0. \end{array} \right.$$
(2.5.7)

Portret fazowy układu w tym przypadku wygląda tak, jak to jest pokazane na rys. 2.9. Zwroćmy uwagę na to że osie współrzędnych są trajektoriami fazowymi układu. Oś pozioma odpowiada przypadku C_2 ; oś pionowa odpowiada przypadku osobliwemu C_1 . Cztery trajektorie fazowe, ktore rozpoczynają się lub kończą w punkcie (0, 0) (zwane *separatrysami siodła*) nie mogą być wyrażone wzorem (2.5.7).



Rys 2.9. Portret fazowy w otoczeniu punktu siodłowego

4. Wartości własne λ_1, λ_2 macierzy \hat{M} są czysto urojone: $\lambda_{1,2} = \pm \omega$.W tym przypadku punkt (0, 0) przestrzeni fazowej nazywa się środkiem. Istnieje liniowa zamiana zmiennych $(\xi, \eta) \rightarrow (y_1, y_2)$ taka że w nowych zmiennych układ (2.5.4) ma postać

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega\\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1\\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (2.5.8)$$

Rozwiązania ukladu (2.5.8) są funkcjami okresowymi. Na portrecie fazowym są one reprezentowane przez krzywe zamknięte (elipsy), otaczjące początek współrzędnych, p. rys. 2.10.



Rys. 2.10. Portret fazowy ukladu (2.5.8)

5. Wartości własne λ_1, λ_2 macierzy \hat{M} są zespolone: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \omega$. W tym przypadku punkt (0, 0) przestrzeni fazowej nazywa się *ogniskiem* (*niestabilnym* w przypadku gdy $\alpha > 0$ oraz *stabilnym* gdy $\alpha < 0$. Istnieje liniowa zamiana zmiennych (ξ, η) \rightarrow (y_1, y_2) taka że w nowych

zmiennych układ (2.5.4) ma postać

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega\\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1\\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Portret fazowy ogniska niestabilnego przedstawiono na rys. 2.11.



Rys. 2.11. Ognisko niestabilne

Stabilne ognisko rózni się od niestabilnego kierunkiem ruchu, gdyż wszystkie trajektorie fazowe dążą asymptotycznie do punktu (0, 0) gdy $t \rightarrow +\infty$.

Na zakończenie sformułujemy pewne ogólne stwierdzenie które mówi nam, w jakich szczególnych przypadkach lokalne zachowanie się trajektorii fazowych ukladu zlinearyzowanego nie zmienia się jakościowo gdy uwzględnimy odrzucone człony nieliniowe.

Zakładamy że $X_0 \in \mathbb{R}^n$ jest punktem stacjonarnym układu

$$\frac{dX}{dt} = F(X), \tag{2.5.9}$$

zaś układ

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathrm{DF}(X_0)\xi, \quad \xi = X - X_0 \quad (2.5.10)$$

jest jego linearyzacją.

Twierdzenie (Grobman - Hartman). Jeżeli stała macierz $DF(X_0)$ nie ma zerowych lub czysto urojonych wartości własnych, wówczas w otoczeniu punktu X_0 istnieje homeomorfizm $h: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ który odwzorowuje punkt stacjonarny X_0 w punkt stacionarny ukladu (2.5.9), oraz odwzorowuje trajektorie fazowe ukladu (2.5.9) w trajektorie fazowe ukladu (2.5.10), zachowując asymptotyki.

Wniosek. Przebieg trajektorii fazowych w małym otoczeniu zera układu zlinearyzowanego (2.5.4) jakościowo nie zmienia się przy dodaniu odrzuconych członów nieliniowych dla wszystkich wymienionych przypadków **za wyjątkiem środka**.

Przedyskutujemy pokrótce podstawowe punkty analizy jakościowej układów dynamicznych:

[(a)] znalezienie punktów stacjonarnych oraz określenie ich typów;

[(b)] określenie przebiegu separatrys oraz ich zachowania asymptotycznego;

[(c)] określenie istnienia zbiorów przyciągających (odpychających) odmiennych od punktów stacjonarnych (w przypadku *R*² mogą nimi być cykle graniczne, czyli *nieliniowe* rozwiązania okresowe);

- [(d)] określenie basenów przyciągania atraktorów (zbiorów przyciągających);
- [(e)] naszkicowanie globalnego portretu fazowego.

Przy realizacji analizy jakościowej należy kierować się następującymy regułami:

- trajektorie fazowe są styczne w każdym punkcie do odpowiedniego wektora pola wektorowego określonego prawymi stronami ukladu dynamicznego;

- trajektorie fazowe zaczynają się (kończą się) w punktach stacjonarnych, innych zbiorach przyciągających (odpychających) lub w nieskończoności;

- trajektorie fazowe mogą się przecinać jedynie w punkcie stacjonarnym.

Pełna realizacja wskazanego "programu działań" wymaga doswiadczenia praktycznego nawet w przypadku *R*². Istnieje jednak klasa układów dynamicznych ktorych analiza jest prostsza.

2.6. Układy konserwatywne o jednym stopniu swobody

Wyczerpujacy opis jakościowy można uzyskać w przypadku dwuwymiarowego ukladu

hamiltonowskiego **Definicja.** Układ

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y),$$
 (2.6.1)

nazywamy układem hamiltonowskim, jeżeli istnieje funkcja H(x, y) taka że zachodzą równości

$$P(x,y) = \frac{\partial H(x,y)}{\partial y}, \qquad Q(x,y) = -\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}. \qquad (2.6.2)$$

W przypadku gdy zachodzi (2.6.2), *H(x, y)* nazywamy *funkcją Hamiltona (lub hamiltonianem)* układu (2.6.1). Zachodzi

Twierdzenie 2.6.1. Funkcja Hamiltona zachowuje stałą wartość na rozwiązaniach układu dynamicznego.

Wniosek. Każdą trajektorię trajektorię fazową dwuwymiarowego układu hamiltonowskiego można przedstawić w postaci

$$H(x, y) = C$$

przy pewnej wartości $C \in R$.

Okazuje się że duża klasa układów mechanicznych (i oczywiście nie tylko mechanicznych) może być przedstawiona w postaci dwuwymiarowych układów hamiltonowskich. Jako przykład rozpatrzmy równanie ruchu punktu materialnego o masie *m* w polu sił potencjalnych:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x) = -\operatorname{grad} U(x).$$
 (2.6.3)

Równanie to mozna przepisać w następującej postaci równoważnej:

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = f(x) = \frac{1}{m} F(x) = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}, \quad V(x) = \frac{1}{m} U(x).$$
(4)

W mechanice układ takiej postaci nazywa sie układem konserwatywnym (lub zachowawczym) o jednym stopniu swobody.

Stwierdzenie 2.6.1. Funkcja

$$H(x,y) = \frac{y^2}{2} + V(x)$$
 (2.6.5)

jest funkcją Hamiltona układu (2.6.4).

Stwierdzenie 2.6.2. Prosty punkt stacjonarny układu hamiltonowskiego może być albo

siodłem, albo środkiem.

Dowód. Jeżeli punkt (x_0, y_0) jest punktem stacjonarnym, wówczas

$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} |_{x_0,y_0} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial y} |_{x_0,y_0} = 0.$$

Układ zlinearyzowany w zmiennych $\xi = x - x_0$ $\eta = y - y_0$ można przedstawić w postaci

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}H_{yx} & H_{yy}\\-H_{xx} & -H_{xy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},$$

gdzie wartości elementów macierzowych obliczane są w punkcie stacjonarnym. Stąd wartości własne macierzy linearyzacji układu hamiltonowskiego przedstawione są wzorem

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{H_{xy}^2 - H_{xx}H_{yy}}$$

Są tutaj dwie opcje. Jeżeli wyrażenie pod pierwiastkiem jest większe od zera, wówczas wartości własne są rzeczywiste i mają różne znaki. Natomiast, jeżeli wyrazenie pod pierwiastkiem jest ujemne, wówczas wartości własne są czysto urojone.

Wniosek. W przypadku układu (2.6.4) wszystke punkty stacjonarne leżą na osi poziomej. Ponadto współrzędne *x* punktów stacjonarnych pokrywają się ze zboirem punktów w których funkcja V(x), określająca energię potencjalną układu, ma ekstrema lokalne. Minimum lokalne odpowiada środkowi; maksimum lokalne odpowiada siodłu.

Dowód. Macierz linearyzacji układu (2.6.4) w otoczeniu punktu stacjonarnego ma

postać

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V''(x_0) & 0 \end{pmatrix},$$

stąd $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-V''(x_0)}$ i ze względu na to że $V''(x_0) = 0$, teza staje się oczywistą.

Wymienimy tu dodatkowe właściwości funkcji Hamiltona (5) pozwalające uprościć analizę jakościową ukladu (2.6.4):

(a)
$$H(x, -y) = H(x, y);$$

(b) trajektoria fazowa odpowiadająca poziomicy

$$\frac{y^2}{2} + V(x) = C$$

nie może mieć wspołrzędnej x dla której V(x) > C;

(c) w punkcie (x_0 , 0) dla którego $V(x_0) = C$ trajektoria fazowa "przebija" oś poziomą pod kątem prostym (wyjatkiem jest sytuacja gdy (x_0 , 0) jest punktem stacjonarnym).

2.7. Przyklad : wahadło płaskie

Jak wiadomo, wahadło płaskie jest opisywane równaniem

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 \operatorname{Sin}[x] = 0.$$

Równanie to można przedstawić w postaci równoważnego układu równań rzędu pierwszego:

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -\omega^2 \operatorname{Sin}[x] = 0. \qquad (2.7.1)$$

Rozwiązując układ równań $\partial_y H(x, y) = y, -\partial_x H(x, y) = -\omega^2 \operatorname{Sin}[x]$, otrzymamy że

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \omega^2 \operatorname{Cos}[x]$$
. (2.7.2)

Stwierdzenie 2.7.1. Funkcja Hamiltona (2.7.2) posiada następujące własności:

- (a) H(-x, y) = H(x, y);
- (b) $H(x\pm 2 k \pi, y)=H(x, y); k=1,2,...$

Wniosek. Globalny portret fazowy mozna otrzymać, konstruując portret fazowy na zbiorze $\Omega \subset R^2 = \{(x, y) \in \langle -\pi, \pi \rangle \times R^1\}$, a następnie dokonując translacji o odcinek krotny 2π wzdłuż osi poziomej w lewo i w prawo.

Punkty stacjonarne ukladu (2.7.1) określa się z równości y = Sin[x] = 0. Na zbiorze Ω istnieją trzy punkty stacjonarne:

$$A = (0, 0),$$
 $B_{\pm} = (\pm \pi, 0).$

Ponieważ funkcja $V[x] = -\omega^2 \operatorname{Cos}[x]$, określająca energię potencjalną ukladu, ma w punkcie x=0 minimum lokalne, natomiast w punktach $x_{\pm} = \pm \pi$ ma maksima lokalne, więc, na mocy wniosku do stwierdzenia 2, punkt A jest środkiem, wtenczas gdy punkty B_{\pm} są punktami siodłowymi.

Okazuje się, że separatrysa wychodząca z punktu siodłowego $(-\pi, 0)$ i idąca w prawo tworzy jedną trajektorię z separatrysą wchodzącą w punkt siodłowy $(\pi, 0)$ (separatrysa łącząca dwa punkty stacjonarne nazywa się *trajektorią heterokliniczną*). Wynika to z tego że postać niejawna trajektorii wychodzącej z punktu B_- zadana jest wzorem

$$\frac{v^2}{2} - \omega^2 \operatorname{Cos}[x] = H(-\pi, 0) = \omega^2.$$

Orbitę idacą w prawo w górę określa wzór

$$y=+\omega \sqrt{2(\cos[x]+1)}$$
. (2.7.3)

Funkcja ta rośnie na odcinku ($-\pi$, 0), osiągając maksimum na prawym końcu odcinka. To że trajektoria osiąga przy $x = \pi$ punkt B_+ , wynika z symetrii funkcji względem odbić $x \rightarrow -x$. Ze względu na symetrię funkcji Hamiltona (2.7.2), separatrysa siodła B_+ położona w dolnej półpłaszczyźnie i skierowana w lewo w dół tworzy z odpowiednią separatrysą punktu B_- trajektorię heterokliniczną symetryczną do (2.7.3) względem osi OX. Dla zakończenia analizy jakościowej układu na zbiorze Ω , należy odpowiedzieć na pytanie o tym, jak zachowuje się środek znajdujący się w punkcie *A* przy dodaniu odrzuconych członów nieliniowych. Okazuje się że w przypadku układu hamiltonowskiego środek nie zmienia swego charakteru, co więcej, wszystkie trajektorie otaczające poczatek współrzędnych i leżące wewnątrz zbioru ograniczonego przez górną i dolna heterokliniki punktów siodłowych B_+ i B_- sa trajektoriami zamkniętymi (elipsami) niejawnie opisywane poniższym wzorem:

$$\frac{y^2}{2} - \omega^2 \cos[x] = C, \qquad |C| < \omega^2.$$
 (2.7.4)

W przypadku, gdyby stała |C| we wzorze (2.7.4) byłaby większa od ω^2 , wzor opisywałby trajektorie nieograniczone leżące powyżej lub poniżej obwodu heteroklinicznego. Portret fazowy układu (2.7.1) można sporządzić posługując się narzędziami pakietu *Mathematica*, p. niżej.

Wahadło matematyczne : globalny portret fazowy spotządzony przy $\omega=1$

ClearAll["Global`*"]

$$V = -\cos[x];$$

$$T = \frac{1}{2} (y)^{2};$$

$$H = T + V;$$

ContourPlot[Evaluate[Table[H == b, {b, -2.5, 2.5, 0.5`}]],

 $\{x, -4\pi, 4\pi\}, \{y, -3, 3\}, AxesLabel \rightarrow \{"X", "Y"\}, AspectRatio \rightarrow 1/3,$

Axes \rightarrow True, ContourStyle \rightarrow {Black, Black, Black, {Thick, Red},

Blue, Blue, Blue, {Thick, Red}, Black, Black, Black}]



Zadania. Sporządzić portrety fazowe układów o jednym stopniu swobody w przypadku gdy

(a)
$$V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$$

(b)
$$V(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

(c)
$$V(x) = -x^2(x^2 - 1)$$

2.8. Drgania nieliniowe w układach o parametrach skupionych

2.8 .1. Wstęp

Procesy okresowe można śmiało odnieść do najbardziej rozpowszechnionych zjawisk natury. Zmiana dnia i nocy, okresowo powtarzające się pory roku, dźwięki i barwy świata - to wszystko jest związane z okresowością. Badania drgań nieliniowych w układach mechanicznych i elektrycznych prowadzone są intensywnie od wielu dziesięcoleci ze względu na wielkie zapotrzebowanie praktyczne. W ostatnim czasie interes do takich badań przejawia się też ze strony przedstawicieli nauk chemicznych i biologicznych, ekologów i finansistów, gdyż powszechność zjawisk okresowych nie ogranicza się bynajmniej do zjawisk przyrodniczych. Rozwiązania okresowe uzyskiwane w ramach dwuwymiarowych układów dynamicznych wiążą się, na ogół, z pewną regularnością (stałe okresy drgań, stabilność rozwiązań i t.p.). Niemniej nawet w tym przypadku istotnie nieliniowe rozwiązania nie można opisać za pomocą znanych nam funkcji elementarnych czy szeregów, dlatego w tej dziedzinie wiedzy szeroko są stosowane metody jakościowe i numeryczne. W przypadku wielowymiarowym sytuacja staje się jeszcze bardziej skomplikowana, ponieważ zmiana parametrów układu może spowodować powstanie rozwiazań wielookresowych i chaotycznych, przy czym te dwa rodzaje drgań nieraz można odróżnić tylko stosując metody specjalne. Nowy podrozdział zaczynamy od prezentacji prostych modeli. W miarę wynikających potrzeb wprowadzane będą nowe narzędzia techniczne. Później przejdziemy też do badań układów wielowymiarowych i przedstawienia narzędzi pozwalających badać układy chaotyczne.

2.8 .2. Modele konkurencji międzygatunkowej

Na początku XX stulecia zauważono że liczebności populacji dużych ryb (drapieżników) oraz małych ryb (ofiar) w morzu Adriatyckim przejawiają cechy okresowości. Mniej-więcej w tym samym czasie podobny efekt był zauważony przy obróbce danych empirycznych dotyczących liczebności populacji rysi i zająców w lasach Kanady.

Mechanizm zaobserwowanych zjawisk jest dość powszechny. Intuicyjnie jest on

raczej zrozumiały: wzrost zaosbów pokarmowych sprzyja wzrostu liczebności populacji drapieżników. Z kolei, pojawienie się nadmiernej ilości drapiezników prowadzi do zmniejszeniu populacji ofiar, co po jakimś czasie wywołuje głód wsród drapieżnikow i zmniejszenie ich liczebności, a to, z kolei, sprzyja zwiększeniu się populacji ofiar. Wskutek tego ekosystem powraca do stadium początkowego. Jednym z najprostszych modeli opisujący powyższy ekosystem jest model Lotki-Volterry (L-V). Oznaczmy przez *N*^B liczebność populacji drapieżników (B oznacza "big fish") zaś przez *N*^L populacje ofiar (L oznacza "little fish"), Dynamikę populalcji w modelu opisuje układ równań

$$\dot{N}_B = (-\beta + \gamma N_L) N_B, \qquad \dot{N}_L = (\alpha - \gamma N_B) N_L. \qquad (2.8.1)$$

Zakłada się że wszystkie współczynniki są nieujemne. Niżej przedstawiono schemat numeryczny symulujący powyższy uklad oraz podano interaktywny opis graficzny wyników eksperymentów numerycznych.

Komórka 2.8.1. Model Lottia - Volterry

```
ClearAll["Global`*"]

Clear[\alpha, \beta];

{\alpha, \beta} = {2, 1};

\Omega = \sqrt{g/L};

Manipulate[

eqla = x'[t] - (\alpha - \gamma y[t]) x[t];

eq2a = y'[t] - (-\beta + \gamma x[t]) y[t];

sol =

NDSolve[{eqla = 0, eq2a = 0, x[0] = 100, y[0] = 5}, {x[t], y[t]}, {t, 0, 250}];

U = x[t] /. sol;

V = y[t] /. sol;

Plot[{U, V}, {t, 0, T}, PlotRange \rightarrow Full,

PlotStyle \rightarrow {{Black, Dashing[{.02}]}, {Red, Thick}},

PlotLabel \rightarrow "solid: little fish, dashed: big fish"],

{\gamma, 0.01, 0.1}, {T, {50, 100, 150, 200, 250}}]
```



Widzimy więc że układ (2.8.1) dla ustalonych parametrów $\alpha=2, \beta=1$ oraz $\gamma \in \langle 0.01, 0.1 \rangle$ posiada rozwiązania okresowe. Zwróćmy uwagę na to że maksymalne wartości poszczególnych populacji są oddzielone od siebie pewnym odcinkiem czasowym.

2.8.3. Model Van der Pola

Model ten opisuje oscylacje w obwodzie elektrycznym z nieliniową rezystancją gdy energia elektryczna jest rozpraszana przy dużych amplitudach i jest generowana przy małych. Równanie to, wprowadzone przez Van der Pola ma postać

$$\ddot{x} - \epsilon (1 - x^2) \dot{x} + \omega^2 x = 0,$$
 (2.8.2)

gdzie $\omega > 0$, $0 \le \epsilon$. Równanie (2.8.2) zostało wprowadzone jako model obwodu elektrycznego z lampą elektroniczną (triodą) której własności przewodzące zmieniają się wraz ze zmianą natężenia prądu. Przepiszmy równanie w postaci układu dynamicznego:

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = \epsilon \left(1 - x^2\right) \dot{x} - \omega^2 x.$$
 (2.8.3)

Rozpatrzmy numeryczne rozwiązania uklądu (2.8.3). Ponieważ wartość liczbowa stałej ω nie jest istotna, kładziemy ją równą jedynce. Procedura rozwiązywania ukladu wraz z graficznym przedstawieniem zagadnienia Cauchyego przy rónych warunkach początkowych i $\epsilon \in \langle 0, 1 \rangle$ przedstawiona jest poniżej. Widać z niej że rozwiazanie, przy dowolnie wybranych niezerowych danych początkowych dąży do rozwiązania okresowego (cyklu granicznego).

Komórka 2.8.2. Model Van der Pola

```
Manipulate[
eq1a = x'[t] - y[t];
eq2a = y'[t] - eps (1 - x[t]^2) y[t] + x[t];
sol =
   NDSolve[{eq1a == 0, eq2a == 0, x[0] == x0, y[0] == 0}, {x[t], y[t]}, {t, 0, 250}];
U = x[t] /. sol;
V = y[t] /. sol;
Plot[U, {t, 0, T}, PlotRange → Full ],
   {eps, 0, 1}, {x0, {0.1, 1, 5, 10}}, {T, {20, 50, 100, 250}}]
```



2.8.4. Oznaki istnienia (nieistnienia) trajektorii okresowych

Z uwagi na dużą rolę rozwiązań okresowych w modelach zjawisk technicznych i przyrodniczych, podamy kilka kryteriów dotyczących istnienia (nieistnienia) orbit zamknietych (cykli) w określonym obszarze płaszczyzny fazowej.

(A). Rozpatrzmy układ dynamiczny

 $\dot{x} = P(x, y), \qquad \dot{y} = Q(x, y)$ (2.8.4)

o gładkich prawych stronach.

Twierdzenie 2.8.1 (kryterium Bendixona). Jeżeli $\partial_x P + \partial_y Q \neq 0$ nie zmienia znaku w obszarze jednospójnym $\Omega \subset R^2$, to wewnątrz tego obszaru nie istnieją rozwiązania okresowe.

Dowód (ad absurdum). Przypuśćmy że pewne rozwiązanie okresowe γ układu (2.8.4) leży całkowiecie w obszarze Ω . Oznaczmy przez *D* wnętrze obszaru ograniczonego przez γ (rzecz jasna że $D \subset \Omega$). Zachodzą równości

$$0 \neq \iint_{D} (\partial_{x} P + \partial_{y} Q) \, dx \, dy = \oint_{\gamma} (P \, dy - Q \, dx).$$

Układ (2.8.4) można przepisać w równoważnej postaci

$$d t = \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q},$$

z której wynika że na rozwiązaniach układu P d y - Q d x $\equiv 0$. W ten sposób otrzymuje się sprzeczność.

Podamy bez dowodu inne twierdzenie ułatwiające badanie istnienia w zzadanym obszarze trajektorii okresowych.

Twierdzenie 2.8.2 (Poincare-Bendixon). Niech $\Gamma_+ = \{x[t], y[t]\}_{t \ge t_0}$ jest półtrajektorią układu (2.8.4), która nie porzuca pewnego obszaru ograniczonego *D*. Załóżmy ponadto że w D nie ma punktów stacjonarnych. Wówczas zachodzi jedna z dwóch opcji: albo Γ_+ jest orbitą okresową, albo w D istnieje co najmniej jedna trajektoria okresowa γ . W tym drugim przypadku $\Gamma_+ \rightarrow \gamma$ gdy $t \rightarrow \infty$.

Wniosek. Załóżmy, że *D* jest obszarem ograniczonym w którym nie ma punktów stacjonarnych. Jeżeli pole wektorowe {P(x, y), Q(x, y)} | ∂D jest wszędzie skierowane wewnątrz obszaru *D*, wówczas w obwazrze tym istnieje co najmniej jedna orbita okresowa.

Zadanie 2.8.1. Zastosować kryterium Bendixona do następujących sytuacji:

(a)
$$P = -x + 4 y$$
; $Q = -x - y^3$; Ω - pierścień $r_1 < \sqrt{x^2 + y^2} < r_2$

(b)
$$P=-2 \ge e^{(x^2+y^2)}; Q=-2 \ge e^{(x^2+y^2)}; \Omega = R^2$$

Zadanie 2.8.2. Stosując twierdzenie Poincare-Bendixona, zbadać, czy układ

$$\dot{x} = -x (x^2 + y^2 - 2x - 3) + y, \quad \dot{y} = -y (x^2 + y^2 - 2x - 3) - x$$

ma rozwiązania okresowe w obszarze $1/2 < \sqrt{x^2 + y^2} < 4$. Potwierdzić uzyskaną odpowiedź przedstawiając pole wektorowe w prostokącie $x \in \langle -2, 4 \rangle, y \in \langle -3, 3 \rangle$.

Zadanie2.8.3. Stosując twierdzenie Poincare-Bendixona, wykazać, że układ

 $\dot{x} = x + y - x (x^2 + 2y^2), \quad \dot{y} = -x + y - y (x^2 + 2y^2)$

ma rozwiązania okresowe w obszarze $1/2 < \sqrt{x^2 + y^2} < 2$. Potwierdzić uzyskaną odpowiedź przedstawiając pole wektorowe w prostokącie $x \in \langle -2, 2 \rangle, y \in \langle -1.5, 1.5 \rangle$.

Ad zadanie 2

StreamPlot[{-(x (x^2 + y^2 - 2x - 3) - y), - (y (x^2 + y^2 - 2x - 3) + x)},
{x, -2, 4}, {y, -3, 3}]

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ad zadanie 3

StreamPlot[{ $x + y - x (x^2 + 2y^2)$, $-x + y - y (x^2 + 2y^2)$ }, {x, -2, 2}, {y, -1.5, 1.5}]

2.9. Bifurkacje Hopfa w R²

2.9.1. Zaburzenia środka.

Pod czas klasyfikacji prostych punktów stacjonarnych w R^2 zwracaliśmy uwagę na to, że otoczenie punktu stacjonarnego nie jest strukturalnie stabilne w przypadku gdy macierz linearyzacji układu posiada wartosci własne o zerowej częsci rzeczywistej. Jedynym tego rodzaju punktem stacjonarnem w R^2 jest srodek, który niosobliwą liniową zamianą zmiennyc można przekształcić do postaci

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega\\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1\\ y_2 \end{pmatrix}.$$
 (2.9.1)

Charakter pola wektorowego może ulec zmianie zarówno w wyniku zaburenia części liniowej jak i w wyniku uwzględnienia odrzuconych przy linearyzacji układu wyrazów nieliniowych. Tak, na przykład, układ

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon & -\omega \\ \omega & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

który różni się od (2.9.1) tym że do macierzy linearyzacji dodano macierz jednostkową przemnożoną przez ϵ , przy dowolnie małej wartości zaburzającego parametra staje się ogniskiem. Wszystkie rozwiązania tego układu asymptotycznie zmierzają do zera (gdy $\epsilon < 0$) lub do nieskończoności (w przypadku gdy $\epsilon > 0$). Charakter rozwiązań moze również ulegnąć zmienie przy dodaniu odrzuconych członów nieliniowych. Efekt taki obserwowany jest prawie zawsze (wyjątkiem tu są jedynie układy hamiltonowskie). W kolejnym podrozdziale będzie pokazane iż układ nieliniowy

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega\\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1\\ y_2 \end{pmatrix} - (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1\\ y_2 \end{pmatrix}$$
(2.9.2)

przybiera we współrzędnych biegunowych $y_1 = \rho \cos[\theta], y_2 = \rho \sin[\theta]$ postać

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho^3, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega.$$

Wskutek tego że w tej reprezentacji zmienne się rozdzieliły, istnieje możliwość znalezienia dokładnego rozwiązania, które przy dodatkowym założeniu $y_2(0) = 0$ ma postać

$$y_1 = \rho(t) \operatorname{Cos}[\omega t], \quad y_2 = \rho(t) \operatorname{Sin}[\omega t], \quad \rho(t) = [2 (t + t_0)]^{-1/2}.$$
 (2.9.3)

Wzór (2.9.3) opisuje rozwiązanie asymptotycznie zmierzające do zera przy $t \rightarrow +\infty$. Interesująca sytuacja powstaje wtedy, gdy zaburzenie części liniowej oraz dodanie odrzuconej części nieliniowej działają niejako w "przeciwfazie". W rozpatrywanym przykładzie liniowo zaburzonego układu (2.9.2) dzieje się to wtedy, gdy $\epsilon > 0$. Na skutek oddziaływania dwóch odmiennych czynników w układzie może dojść do powstania nieliniowego rozwiązania okresowego zwanego *cyklem granicznym*. Ponieważ w przeważającej większości przypadków nieliniowych uklądów dynamicznych rozwiązań okresowych nie mozna opisać w sposób analityczny, kryteria powstania cyklu granicznego są bardzo cennym narzędziem pozwalającym wykryć obecność takiego rozwiązania za pomocą metod analitycznych. Krótkiemu omówieniu bifurkacji powstania cyklu granicznego poświęcone są kolejne podpunkty.

2.9 .2. Forma normalna i warunki powstania cyklu granicznego.

Rozpatrujemy układ dynamiczny

$$\frac{d}{dt}X = \hat{M}(\mu)X + \Phi(X;\mu), \quad (2.9.4)$$

gdzie $X = (x_1, x_1)^{\text{tr}}$, $\hat{M}(\mu)$ - macierz kwadratowa, zależna od parametru μ , $\Phi(X; \mu) - \text{częśc nieliniowa układu spełniająca warunek}$ $\Phi(X; \mu)_j \mid_{X=0} = \partial_{x_k} \Phi(X; \mu)_j \mid_{X=0} = 0, k, j = 1, 2.$ Załóżmy że istnieje wartość μ_0 taka, że macierz $\hat{M}(\mu_0)$ ma parę czysto urojonych wartości własnych $\lambda_{1,2} = \pm i \omega$. Wprowadźmy oznaczenie $\epsilon = \mu - \mu_0$. Zachodzi

Lemat 2.9.1. Za pomocą przekształcenia $X = \hat{P} Y$, gdzie

$$\hat{P} = (R, -J),$$

R + iJ - wektor własny macierzy $\hat{M}(\mu_0 + \epsilon)$, odpowiadający wartości własnej $\lambda = \epsilon + i\omega$, układ (2.9.4) sprowadza się do postaci

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon & -\omega\\ \omega & \epsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(y_2, y_2; \epsilon)\\ G(y_2, y_2; \epsilon) \end{pmatrix} + O(\epsilon^2),$$

(2.9.5)

gdzie *F*, *G* – człony nieliniowe zerujące sie wraz ze wszytkimi pochodnymi cząstkowymi pierwszego rzędu w punkcie $y_1 = y_2 = 0$.

Przeanalizowanie warunków powstania nieliniowych rozwiązań okresowych dla układu postaci (2.9.5) na ogół jest zbyt trudne. Okazuje się że zawsze istnieje nielin-

iowe przekształcenie asymptotyczne $(y_1, y_2) \rightarrow (p_1, p_2)$ które sptowadza układ (2.9.5) do następującej postaci, zwanej formą normalną układu:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon & -\omega \\ \omega & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1^2 + p_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(\epsilon) & -b(\epsilon) \\ b(\epsilon) & a(\epsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + O(|p|^4, \epsilon^2)$$
(2.9.6)

(szczegóły dotyczące konstrukcji formy normalnej można znaleźć, na przykład, w rozdziale 3 książki J. Guckenheimer, P. Holmes, "*Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*", Springer, NY, 1987 - G&H). Zakłada się że parametry $a(\epsilon)$, $b(\epsilon)$ przy $\epsilon = 0$ są rzędu jedynki, a więc małe zmiany parametru ϵ nie mogą zmienić znaków tych parametrów. Dlatego w dalszym ciągu opuszczamy zależność od ϵ .

Przechodząc do współrzędnych biegunowych $p_1 = \rho \operatorname{Cos}[\theta], p_2 = \rho \operatorname{Sin}[\theta],$ oraz stosując elementarne algebraiczne przekształcenia, możemy otrzymać następujący układ równań:

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho \left(\epsilon + a \rho^2 \right) + O(\rho^4), \qquad (2.9.7)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega + O(\rho^2).$$

Tak więc, w przybliżeniu słusznym przy małych ρ , zmienne się rozdzielają, co daje mozliwość badać bifurkacje zachodzące w układzi przy zmianie ϵ . Rozpatrzmy pierwsze równanie układu (2.9.7). Przy a < 0 oraz $\epsilon > 0$ ma ono dwa punkty stacjinarne: $\rho_0 = 0$ oraz $\rho_1 = \sqrt{-\epsilon/a}$. Łatwo widać, że punkt ρ_0 jest punktem odpychającym, natomiast punkt ρ_1 jest punktem przyciągającym. Przy a>0 oraz $\epsilon < 0$ układ również ma punkty stacjonarne $\rho_0 = 0$ oraz $\rho_1 = \sqrt{-\epsilon/a}$. W tym przypadku punkty zmieniają typy stabilności na przeciwne. Zauważając że z zadaną dokładnością punkt ρ_1 jest rozwiązaniem stacjonarnym perwzego równania, przy tym że $\theta \cong \omega (t - t_0)$, zatem możemy sformułować następujące stwierdzenie.

Twierdzenie 2.9.1 (Andronov 1937, Hopf, 1942). W przypadku gdy parametr *a*, zwany częścią rzeczywistą *pierwszego indeksu Floquet* '*a*, jest ujemny, przy dostatecznie małych $\epsilon > 0$ w układzie (2.9.4) powstaje stabilny cykl graniczny, którego wymiary liniowe są proporcjonalne do $\sqrt{\epsilon}$. W przypadku gdy gdy *a* > 0, w układzie powstaje niestabilny cykl graniczny.

Szkic dowodu (dla przypadku a < 0). Przepiszmy układ (2.9.6) w postaci

$$\frac{d}{dt}p_1 = \epsilon p_1 - \omega p_2 + r^2 (a p_1 - b p_2) + O(r^4) = F + O(r^4);$$

$$\frac{d}{dt} p_2 = \omega p_1 - \epsilon p_2 + r^2 (b p_1 + a p_2) + O(r^4) = G + O(r^4);$$

gdzie $r^2 = p_1^2 + p_2^2$. Traktując prawe strony jako pierwszą i drugą wspołrzędną pola wektorowego i przemnażając to pole skalarnie przez wektor $\vec{r} = (p_1, p_2)$ otrzymamy wyrażenie

$$\vec{r} \cdot \{(F, G) + \epsilon O(r^4)\} = \epsilon r^2 + a r^4 + O(r^5).$$
 (2.9.8)

Jeżeli uda się udowodnić istnienie wielkości r_1 , r_2 , $0 < r_1 < \rho_1 < r_2$ takich że (2.9.8) jest dodatnie przy $r = r_1$ oraz ujemne przy $r = r_2$, wówczas na mocy twierdzenia Poincare-Bendixona w pierścieniu

$$D = \{ (p_1, p_2) | r_1^2 < p_1^2 + p_2^2 < r_2^2 \}$$

istnieje co najmniej jedna orbita okresowa. Zauważmy że znak prawej strony wyrażenia (2.9.8) pokrywa się ze znakiem wyrażenia

$$\epsilon + a r^2 + O(r^3). \tag{2.9.9}$$

Wybierając $0 < \epsilon$ na tyle małym żeby znaki wyrażenia (2.9.9) dla *r* leżącego w pobliżu wartości ρ_1 nie zależały od członów rzędu $O(r^3)$ oraz zakładając że $r_{1,2} = \rho_1 \pm \delta$, $0 < \delta << 1$, przy dostatecznie małej wartości δ , dochodzimy do wniosku że pole wektorowe (*F*, *G*) jest skierowane wewnątrz pierścienia Do takich parametrach, więc obszar ten mieści on co najmniej jedną orbitę okresową. Dowód tego że w pierścieniu może być tylko jedna orbita okresowa jest dość trudny, dlatego go pomijamy. Zauwazmy na końcu że ze względu na konfigurację geometryczna pola wektorowego, orbita okresowa musi być zbiorem przyciągającym.

Uwaga 1. W reprezentacji (2.9.5) pierwszy indeks Floquet'a z dokładnością do $O(|\epsilon|)$ można określić za pomocą następującego wzoru:

$$16 a = F_{111} + F_{122} + G_{112} + G_{222} +$$

$$\frac{1}{\omega} [F_{12} (F_{11} + F_{22}) - G_{12} (G_{11} + G_{22}) - F_{11} G_{11} + F_{22} G_{22}],$$
(2.9.8)

gdzie dolne indeksy 1, 2 oznaczają pochodne cząstkowe względem zmiennych y_1, y_2 .

Wszystkie pochodne są obliczane w punkcie $y_1 = y_2 = 0$ oraz przy $\epsilon = 0$. Uwaga 2. Teoria bifurkacji Andronova-Hopfa przenosi się przy pewnych ograniczeniach na przypadki wielowymiarowe za pomocą *twierdzenia o rozmaitości centralnej*. Sformułowanie tego twierdzenia oraz odpowiedni algorytm można znaleźć w cytowanej wyzej książce Guckenheimera i Holmesa.

2.9 .3. Przykłady badań powstania cyklu granicznego

Przykład I.

Przykład 1. Punkt stacjonarny (0, 0) układu

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\epsilon} \, \mathbf{x} - \mathbf{y} + \boldsymbol{\alpha} \, \mathbf{y}^2 + \boldsymbol{\beta} \, \mathbf{x}^2 \, \mathbf{y}$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{x} - \gamma \, \mathbf{y}^2 + \boldsymbol{\delta} \, \mathbf{x} \, \mathbf{y} - \mathbf{y}^3$$
(2.9 .9)

przy $\epsilon =$

0 jest środkiem. Chcemy określić część rzeczywistą pierwszego indeksu Floqueta, warunki powstania bifurkacji Andronova – Hopfa oraz typ

stabilności układu w zależności od wartości parametrów α , β , γ , δ .

Rozwiązanie. Wartości własne macierzy linearyzacji ukladu (2.9 .9)

 $\begin{array}{l} \mathbb{A} = \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \right) \\ \text{mają postać } \lambda_{1,2} = \frac{\varepsilon}{2} \pm i \sqrt{1 - \varepsilon^2 / 4} = \frac{\varepsilon}{2} \pm i \left[1 + 0 \left(\varepsilon^2 \right) \right]. \ \text{Zakładając że } \mathbf{R} = (1, \ 0)^{\text{tr}}, \\ \text{rozwiązaując równanie wektorowe} \end{array}$

$$A (R + i J) = \left\{ \frac{\epsilon}{2} + i \left[1 + O(\epsilon^2) \right] \right\} [R + i J], J = (J_1, J_2)^{tr}$$

a następnie korzystając z lematu 2.9 .1, dochodzimy do wniosku, że przekształcenie sprowadzające (2.9 .9) do postaci kanonicznej ma postać

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \Lambda(\boldsymbol{\epsilon}),$$

gdzie elementy macierzy $\Lambda(\epsilon)$ są rzędu O ($|\epsilon|$). Zatem część

liniowa układu z dokładnością do O ($|\epsilon|$) nie ulegnie zmianie,

dlatego wzór (2.9 .8) można stosować do ukladu (2.9 .9). Rachując, otrzymamy :

$$16 a = 4 \gamma (\delta - \alpha) - 6.$$

Stabilny cykl graniczny powstaje przy dodatnich ϵ w przypadku gdy $2\gamma(\delta - \alpha) < 3$.

Gdy znak jest przeciwny w układzie

powstaje niestabilny cykl graniczny przy $\epsilon < 0$.

Zwroćmy uwagę na to, że wartość parametru β nie wpływa na powstanie cyklu.

Komórka 2.9.1. Powstanie cyklu granicznego w układzie (2.9.9):

```
Clear [\alpha, \beta, \delta];

{\alpha, \delta} = {1, 1};

Manipulate[

eq1a = x'[t] == \epsilon x[t] - y[t] + \alpha y[t]^2 + \beta x[t]^2 y[t];

eq2a = y'[t] == x[t] - \gamma y[t]^2 + \delta x[t] y[t] - y[t]^3;

sol = NDSolve[{eq1a, eq2a, x[0] == a0, y[0] == 0}, {x[t], y[t]}, {t, 0, 250}];

U = x[t] /. sol;

V = y[t] /. sol;

ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. sol], {t, 0, T}, PlotRange \rightarrow Full],

{\gamma, {-1, 0.5, 1.5}}, {\beta, {-1, 0.5, 1.5}}, {\epsilon, -0.1, 0.6},

{T, {50, 100, 150, 200, 250}}, {a0, {0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4}}]
```



Przykład 2.

Wykażamy że przy pewnej zależności pomiędzy parametrami w układzie

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ a & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 y \end{pmatrix} = \hat{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 y \end{pmatrix}, \qquad |\mu| \ll 1, \ 0 \ll a = O(1)$$
(2.9.10)

zachodzi bifurkacja Hopfa oraz określimy typ stabilności rozwiązania okresowego.

Układ ma środek w początku współrzędnych gdy oraz μ =0. Wiemy, że przekształcenie liniowe które sprowadza układ (2.9.10) do postaci kanonicznej ma postać P=(R, -J), gdzie R+*i* J - wektor własny macierzy \hat{M} :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ a & \mu \end{pmatrix} (\mathbf{R} + \mathbf{i} \mathbf{J}) = \lambda (\mathbf{R} + \mathbf{i} \mathbf{J}),$$

gdzie $\lambda = \frac{\mu}{2} + i \sqrt{a - \frac{\mu^2}{4}}$ - wartość własna macierzy \hat{M} . Dokonując wybieru części rzeczywistej wektora własnego w postaci R=(1, 0)^{tr}, otrzymamy że J=(J₁, J₂)^{tr} spełnia następujące równania:

$$\frac{\mu}{2}$$
 - a $J_1 = O(\mu^2)$, $a = -\sqrt{a} J_2 + O(\mu^2)$.

Zatem, z dokładnością do $O(\mu^2)$,

$$\mathsf{P}=(\mathsf{R}, -\mathsf{J})=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\mu}{2\sqrt{a}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathsf{A}+\mathsf{T}(\mu).$$

Z taką samą dokładnością

$$P^{-1}=A^{-1}-A^{-1} \operatorname{T}(\mu) A^{-1}, \text{ gdzie } A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{a} \end{pmatrix}.$$

Działając operatorem P^{-1} z lewej strony na równanie (2.9.10) oraz dokonując podmiany

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

otrzymamy:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \mu/2 & -\sqrt{a} \\ \sqrt{a} & \mu/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ {y_1}^2 y_2 \end{pmatrix} + O(\mu^2).$$

Przekonaliśmy się że z dokładnością do $O(\mu^2)$ część nieliniowa po przejściu do współrzędnych kanonicznych pozostaje taka sama. Stosując wzór (2.9.8) otrzymamy że a= -1/8. A wiec, przy $\mu > 0$ w układzie tworzy się stabilny cykl graniczny.

Komórka 2.9.2. Powstanie cyklu granicznego w układzie

$$\begin{split} \dot{\mathbf{x}} &= -\mathbf{y}, \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{v} \, \mathbf{x} + \boldsymbol{\mu} \, \mathbf{y} - \mathbf{x}^2 \, \mathbf{y} \\ \\ \textbf{Clear}\left[\boldsymbol{\mu}, \, \mathbf{v}\right]; \end{split}$$

```
\begin{aligned} &\text{Manipulate[} \\ &\text{eq1a = x'[t] == -y[t];} \\ &\text{eq2a = y'[t] == vx[t] + \mu y[t] - x[t]^2 y[t];} \\ &\text{sol = NDSolve[{eq1a, eq2a, x[0] == a0, y[0] == 0}, {x[t], y[t]}, {t, 0, 250}]; \\ &\text{U = x[t] /. sol;} \\ &\text{V = y[t] /. sol;} \\ &\text{ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. sol],} \\ &\text{ {t, 0, T}, PlotRange \to Full, AspectRatio \to k], {\mu, -0.01, 2},} \\ &\text{{v, {0.5, 1.5, 2.5, 3.5}}, {T, {50, 100, 150, 200, 250}}, \\ &\text{{a0, {0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4}}, {k, {0.5, 1, 1.5, 2}}] \end{aligned}
```



2. 9.4. Bifurkacja homokliniczna

Powstanie cyklu granicznego mozna opisać wykorzystując teorię form normalnych. Teoria ta pozwala istonie uprościć człony nieliniowe w prawej stronie układu dynamicznego w małym ale skończonym otoczeniu punktu stacjonarnego (środka). Przy zmianie parametru bifurkacji doprowadzającej do istotnego wrostu średnicy cyklu granicznego, teoria ta staje się nieprzydatna, zaś dalsza ewolucja trajektorii okresowej zależy od czynników globalnych, i m.in. od charakteru punktów stacjonarnych w jej najbliższym otoczeniu. Najczęściej spotykany scenariusz ewolucji trajektorii okresowej położonej w pobliżu punktu siodłowego przebiega następująco. Wraz ze zmianą parametru cykl graniczny powiększa się, zbliżając się do punktu siodłowego; przy pewnej krytycznej wartości parametru dochodzi do bifurkacji homoklinicznej przy której stabilna i niestabilna seperatryse siodła tworzą jedną trajektorię otaczającą ognisko niestabilne; orbita homokliniczna nie jest strukturalnie stabilna, dlateg przy dalszej zmianie parametru jedna z trajektorii wychodzących z ogniska łączy się z separatrysą wchodzącą do siodła, natomiast wszystkie pozostałe trajektorie, łącznie z separatrysą wychodzącą z B(-1, 0), porzucają obszar w którym poprzednio znajdowała sie orbita okresowa. Scenariusz ten realizuje się w poniższym ukladzie:

x'[t] = -y[t];

$$y'[t] = x[t] + \mu y[t] + x[t]^{2} + x[t] y[t]. \qquad (2.9.11)$$

Układ (2.9.11) posiada dwa punkty stacjonarne: A(0, 0) oraz B(-1, 0). Punkt A(0, 0) przy μ =0 jest środkiem, punkt B(-1, 0) przy dowolnych wartościach μ jest siodłem. Stosując teorię form normalnych, w szczególności wzór (2.9.8), można przekonać sie w tym, że cykl graniczny który tworzy się w układzie przy 0< μ <<1 jest stabilny. Dalsza ewolucja cyklu można prześledzić za pomocą symulacji numerycznych. Chcąc przedstawić na globalnym portrecie fazowym układu (2.9.11) seperatryse siodła B(-1, 0), należy znaleźć kierunki charakterystycne wzdłuż których separatryse wchodzą (wychodzą) do (z) punktu stacjonarnego. Dokonując zamiany zmiennych (z_1 , z_2)= (x+1, y) otrzymamy układ zlinearyzowany

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \mu - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \equiv \hat{M} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Łatwo można przekonać się w tym, że wartości własne macierzy \hat{M} dane są wzorem

$$\lambda_{\pm} = \frac{\mu - 1 \pm \sqrt{(\mu - 1)^2 - 4}}{2}.$$

Wartościom tym odpowiadają wektory własne $B_{\pm} = \text{colon}(1, \lambda_{\pm})$. Portret fazowy konstruujemy numerycznie. Wyniki są przedstawione na trzech kolejnych rysunkach otrzymanyc, odpowiednio, przy μ =0.07, 0.1355 oraz 0.14. Kolorem niebieskim pokazana jest separatrysa wchodząca do siodła B(-1,0); kolorem czerwonym - separatrysa wychodząca, zaś linią przerywaną - trajektorie wychodzące z ogniska A(0, 0).



2.10. Drgania w układach o nieautonomicznych i wielowymiarowych

2.10 .1. Wstęp

Oscylacje w układach wymiaru ≥ 2, do których można również odnieść dwuwymiarowe uklady nieautonomiczne, przy zmianach parematrów mogą przebiegać w sposób bardzo odmienny od tego, co mielismy możliwość obserwować w przypadku autonomicznych układów dwuwymiarowych. Dlatego do ich badań stosuje się bardziej zaawansowane narzędzia, takie jak technika cięć Poincarego, czy badanie indeksu Lyapunova. W sposób nieco paradoksalny, zjawiska bifurkacyjne zachodzące w ukladach dynamicznych dyskretnych wymiaru jeden przebiegają w sposób podobny do bifurkacji w układach wielowymiarowych. Nowy rozdział rozpoczynamy od omówienia równania typu Duffinga z okresową siłą zewnętrzną.

2.10.2. Bifurkacje w równaniu Duffinga.

Zmodyfikowane rónanie Duffinga ma postać

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} - x + x^3 = F \cos[\omega t].$$
 (2.10.1)

Opisuje ono odchylenia sztabki stalowej od położenia równowagi w polu magnetycznym (p. rys. 2.10.1). Żródłami pola stałego są dwa magnesy stałe, których bieguny połnocne znajdują się poniżej sztabki są po lewej i po prawej stronie od osi symetrii sztabki. Ponadto w układzie znajduje się źródło zmiennego pola magnetycznego. Rolę tę pełni żelazna rama do której przymocowany jest górny koniec sztabki. Zródło to jest aktywne tylko wtedy gdy do niego podaje się prąd zmienny o częstości ω .



Rys. 2.10.1.

Przy wyłączonym źródle zewnętrznym (F=0) i braku tarcia (γ =0), sztabka oscyluje dookoła jednego z dwóch położeń równowagi powstających na skutek obecności stałych pól magnetycznych, które są na tyle silne że przezwyciężają siłę sprężystości sztabki. Przy takich założaniach (2.10.1) staje się równoważne ukladowi hamiltonowskiemu

$$\dot{x}=-y=-H_y,$$
 $\dot{y}=x^3-x=H_x,$ (2.10.2)

gdzie

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}.$$
 (2.10.3)

Położenie oraz charakter punktów stacjonarnych ukladu (2.10.2) określa przebieg funkcji $U(x) = \frac{x^2}{4}(x^2 - 2)$

przedstawionej na rys. 2.10.2.



Rys. 2.10.2

Z rysunku widać, że układ ma punkt siodłowy A(0, 0) oraz parę pnktów $B(\pm 1, 0)$, kazdy z których jest środkiem. Na portrecie fazowym, przedstawionym na rys. (2.10.3) należy wyszczególnić symetryczną parę rozwiązań homoklinicznych, oddzielających ruchy o małych okresach, wykonywanych w pobliżu biegunów magnesów stałych, od ruchów o większych okresach, pod czas których sztabka "odwiedza" wszystkie trzy punkty równowagi. Wszystkie trajektorie fazowe, za wyjątkiem pary pętli homoklinicznych opisują więc ruchy okresowe.



Rys. 2.10.3.

W przypadku gdy tarcie oraz siła zewnętrzna są niezerowe, uklad (2.10.1) staje się

równoważny trójwymiarowemu układowi autonomicznemu

$$\frac{dx}{d\tau} = -y,$$

$$\frac{dy}{d\tau} = x^3 - x - 2\gamma y - F \operatorname{Cos}[z],$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \omega.$$

$$(2.10.4)$$

Ustalając wartości parametrów y=0.25, ω =1, x[0]=0.09;=x'[0]=0; oraz zmieniając parametr F w granicach odcinka <0, 5.5> dokonyuwaliśmy symulacji numerycznych przebieg których ilustrują poniższe rysunki. Przy F=0 pierwsze dwa rónania układu są autonomiczne. Trajektoria fazowa przechodząca przez punkt (x_0 , y_0) = (0.09, 0) zbliża się asymptotycznie do w punktu stacjonarnego B_+ = (1, 0), który jest ogniskiem stabilnym (rys. 2.10.4). Przy F>0 w otoczeniu punktu B_+ obserwuje się stabilny cykl graniczny. Przy małych dodatnich wartościach parametru F jego rzut na płaszczyznę (x,y) jest silnie spłaszczony w kierunku pionowym, rys. 2.10.5. W mairę wzrostu parametru F średnica cyklu rośnie, spłaszczoność zanika, a jego lewy brzeg zbliża się do początku współrzędnych (na rys. 2.10.6 pokazano cykl odpowiadający wartości F=0.3). Przy $F \cong 0.3405$ pojawiają się oznaki podwajania się okresu. Przy F=0.348 to że cykl podwoił okres jest w pełni widoczne (rys. 2.10.7). Przy $F \cong 0.3408$ zachodzi kolejne podwajanie okresu. Portret fazowy cyklu o okresie 4 T jest przedstawiony na rys. 2.10.8. Po dalszym ziększeniu parametru F obserwuje się kolejne podwajanie okresu. Na rys. 2.10.9 prawdopodbnie przedstawione są drgania okresu 8 T, ale jednoznacznie na podstawie wizualnych obserwacji stwierdzic już tego nie mozna. Przy F = 0.38obserwuje się oscylacje które wyglądają jak chaotyczne (p. rys.2.10.10). Przy F = 0.39 oraz F = 0.4obserwuje się drgania chaotyczne które wypełniają obszar zawierający wszystkie trzy punkty stacjonarne układu niezaburzonego (rys.2.10.11, 2.10.12). Przy F=0.45 obserwuje się okno w którym układ demonstruje duże oscylacje o okresie 2T (rys.2.10.13). Powyżej tej wartości parametru rozpoczyna się kolejny cykl podwajania okresu oscylacji o dużej amplitudzie (rys.2.10.14), który się kończy chaotyzacją drgań (rys.2.10.15). Przy F = 0.55 drgania znów przybierają charakter okresowy (rys.2.10.16). Reasumując, pełne równanie (2.10.1) demonstruje bardzo skomplikowane zachowanie się. Zeby to zachowanie przeanalizować chociażby częściowo, niezbędnym jest wykorzystanie nowych narzędzi badań.







Rys. 2.10 .10

-0.4





Rys. 2.10 .12

Rys. 2.10 .13



Rys. 2.10 .16

2.11. Rozwiazania chaotyczne.

2.11.1. Indeks Lyapunova

Wizualizacja rozwiazań o złożonym zachowaniu się (wieleokresowych, chaotyznych) daje wgląd w zachowanie się trajektorii oraz zmianach zachodzących w układzie przy zmienie parametrów, jednak nie daje odpowiedzi na pytanie, czy mamy do czynienia z rozwiazaniami chaotycznymi, czy z rozwiązaniami o okresie *n T* przy duzych *n*. Ściślejszą charakterystyką zachowania się trajektorii jest indeks Lyapunova. Chaotyczne trajektorie cechuje skrajna czułość na wybór warunków pczątkowych. Pouczającym przykładem ilustrującym tę czułość może być rozwiązanie jednego i tego ż zagadnienia początkowego przy zastosowniu metod numerycznych o różnych dokładnościach. Ilustruje to przykład przedstawiony poniżej. Rozwiazujemy zagadnienie Cauchyego

$$x''+Sin[x]+Sin[x-2 t]=0, \quad x[0] = -0.5, x'[0] = 0$$

z różną dokładnością (błędem zaokrąglenia). W pierwszej symulacji stosujemy opcje *AccuracyGoal* \rightarrow 6, *PrecisionGoal* \rightarrow 6, natomiast w drugiej symulacji opcje *Accuracy*- *Goal* \rightarrow 10, *PrecisionGoal* \rightarrow 10. Wyniki eksperymentów numerycznych przedstawione są na wykresie, na którym widać że po pewnym czasie wyniki symulacji zaczynają coraz bardziej się różnić od siebie.



Rys. 2.11.1

Jeżeli przedstawić graficznie różnice $\Delta x[t]=x_1[t] - x_2[t]$, gdzi *i* oznacza numer eksperymentu, to widać wyraźnie że różnica, która w przedziale $t \in (0, 40)$ wynosiła rzędu $10^{-3} \div 10^{-4}$ przy $t \cong 42$ doznaje gwałtownego skoku (rys. 2.11.2 od lewej) po czym trajektorie oddalają się coraz bardziej od siebie (rys. 2.11.2 od prawej), co zaczyna być widoczne na rys. 2.11.1 bardzo wyraźnie, począwszy od



Rys. 2.11.2

Przedstawione zjawisko jest raczej cechą ogólną układów demonstrujących zachowanie chaotyczne: jezeli porównać zadaną trajektorię z trajektoriami zanajdującymi się w jej bliskim otoczeniu, to da się zauważyć że średnia odległość między nimi zwiększa sie w tempie wykładnicznym: $|\Delta x| \sim \text{Exp}[\lambda t]$, $\lambda > 0$. Wielkość λ , charakteryzująca stopień rozbiegania się trajektorii nazywa się *indeksem (wykładnikiem) Lyapunova*. Wielkość λ można określić w eksperymencie numerycznym, który będzie opisany poniżej. Najpierw jednak powinniśmy podać definicji tej wielkości. Zadajmy więc punkt $z_0 = (x_0, v_0)$ w przestrzeni fazowej i rozpatrzmy trajektorię fazową

$$z[t, z_0] = (x(t, z_0), y(t, z_0))$$

przechodzącą przez ten punkt w chwili t = 0. Rozpatrzmy zbiór małych odchyleń $d_0 = \{(\Delta x_0, \Delta y_0)\}$. Indeks Lyapunova definiujemy w sposób następujący:

$$\mathcal{A}[z_0] = \lim_{t \to \infty, |d_0| \to 0} \left\langle \frac{1}{t} \operatorname{Ln}\left[\frac{|z(t, z_0 + d_0) - z(t, z_0)|}{|d_0|} \right] \right\rangle$$
(2.11.1)

gdzie symbol $\langle \rangle$ oznacza średnią policzoną po dostatecznej liczbie infinitezymalnych odchyleń równomiernie otaczających punkt $\vec{z_0}$. Wykorzystując powyzszaa definicję, nizej podaliśmy algorytm obrachunku indeksu Lyapunova dla wybranej trajektorii równania wahadła matematycznego z okresową siłą wymuszającą.

Komórka 2.11 .1. Ilustracja czułości rozwiazań układu chaotycznego na przykładzie nieautonomicznego modelu wahadła matematycznego

```
\begin{aligned} & \text{Clear}["\text{Global`*"}] \\ & \omega = 1; \text{ g} = 1; \text{ L} = 1; \text{ f} = 1; \quad (* \text{ controlling parameters }) \\ & \text{x0} = -0.50; \text{ v0} = 0; \quad (* \text{ initial position and velocity }*) \\ & \text{deq} = \texttt{x''}[\texttt{t}] = -(\texttt{g}/\texttt{L}) \text{Sin}[\texttt{x}[\texttt{t}]] - \texttt{fSin}[\texttt{x}[\texttt{t}] - \omega \texttt{t}]; \\ & (* \text{ forced pendulum equation }*) \\ & \text{sol} = \text{NDSolve}[\{\text{deq}, \texttt{x}[0] = \texttt{x0}, \texttt{x'}[0] = \texttt{v0}\}, \texttt{x}, \\ & \{\texttt{t}, 0, 200\}, \text{MaxSteps} \rightarrow 5000, \text{AccuracyGoal} \rightarrow 6, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 6]; \\ & \text{graph1} = \text{Plot}[\text{Evaluate}[\{\texttt{x}[\texttt{t}]\}/. \text{ sol}], \{\texttt{t}, 0, 200\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{Red}]; \\ & (* \text{ numerically solve de }*) \\ & \text{sol2} = \text{NDSolve}[\{\text{deq}, \texttt{x}[0] = \texttt{x0}, \texttt{x'}[0] = \texttt{v0}\}, \texttt{x}, \{\texttt{t}, 0, 200\}, \text{MaxSteps} \rightarrow 5000, \\ & \text{AccuracyGoal} \rightarrow 10, \text{PrecisionGoal} \rightarrow 10]; (* \text{ numerically solve de }*) \\ & \text{graph2} = \text{Plot}[\text{Evaluate}[\{\texttt{x}[\texttt{t}]\}/. \text{ sol2}], \{\texttt{t}, 0, 200\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{Blue}]; \end{aligned}
```

```
Show[graph1, graph2]
```

```
Komórka 2 11 2. Określenie indeksu
```

```
Lyapunova dla trajektorii fazowej równania

x'[t] v[t], v'[t] = -Sin[x[t]] - Sin[x[t] - 2t]

przechodzącej w chwili t = 0 przez punkt (x<sub>0</sub>, v<sub>0</sub>) = (-0.5, 0)

z = {x[t], v[t]} /.

NDSolve[{x'[t] = v[t], v'[t] = -Sin[x[t]] - Sin[x[t] - 2t], x[0] = -0.5, v[0] = 0.0}, {x[t], v[t]}, {t, 0, 50}, MaxSteps \rightarrow 50000][1]];

z0 = Table[{-0.5+10^-5 (2 Random[] - 1), 10^-5 (2 Random[] - 1)}, {m, 1, 40}];
```

```
\Delta z[t] = Table[Sqrt[({x[t], v[t]} - z).({x[t], v[t]} - z)] /.
      NDSolve[{x'[t] = v[t], v'[t] = -Sin[x[t]] - Sin[x[t] - 2t],
          x[0] = z0[[m, 1]], v[0] = z0[[m, 2]]\}, {x[t], v[t]},
         \{t, 0, 50\}, MaxSteps \rightarrow 50000][[1]], \{m, 1, 40\}];
\lambda[t_] = 1/40 \operatorname{Sum}[\operatorname{Log}[\Delta z[t] [[n]]/\Delta z[0] [[n]]], \{n, 1, 40\}]/t;
Plot[\lambda[t], \{t, 0, 50\},
 PlotRange → {{-1, 50}, {-0.1, 0.6}}, AxesLabel → {"t", "\lambda(t)"}]
  \lambda(t)
0.6
0.5
 0.4
 0.3
0.2
0.1
                                                _____t
            10
                     20
                              30
                                       40
-0.1
```

Rys. 2.11.3

Uwaga. Stosowana metoda obliczania indeksu Lyapunova nie jest metodą precyzyjną. Problem polega na tym, że odległość $|d_0|$ nie może być większą od precyzji używanej metody numerycznej. Jeżeli natomiast $|d_0|$ jest zbyt duża, to wartość $\lambda[z_0]$ będzie obarczona błędem wynikającym z tego że trajektorie oddalają się od siebie wykładniczo wtedy gdy znajdują się one dostatecznie blisko siebie. Tym nie mniej, wykorzystana metoda nadaje się do naszych celów praktycznych. Wyraźnie wskazuje ona na to, że poszukiwana funkcja zmierza do pewnej wielkości dodatniej bliskiej do 0.3.

Stopień oddalania się trajektorii zależy, na ogół, od ich wzajemnego położenia. Dlatego bardziej poprawnie by było mówić o zbiorze indeksów Lyapunova. Liczba indeksów równa jest liczbie stopni swobody w kierunkach prostopadłych do trajektorii, czyli (N - 1), gdzie N - wymiar układu dynamicznego. Wzór (2.11.1) określa, jednak tylko jeden indeks, zwany *starszym indeksem Lyapunova*. Dzieje się tak dlatego, iż w algorytmie opartym o opisaną powyżej procedurę rzeczywiście określa się wielkość zblizoną do największego sposród indeksów Lyapunova. Poniżej wyjaśnia sie to w oparciu o odwzorowanie Poincarego generowane przez potok fazowy Φ_t układu dynamicznego w otoczeniu orbity okresowej. Konstrukcja odwzorowania jest następująca. Orbitę okresową γ przecina sie transwersalnie płaszczyzną Σ (p. rys. 2.11.4).



Rys. 2.11. 4.

Każdemu punktowi $q \in U_p \subset \Sigma$ stawia się w odpowiedność punkt $f(q) = \Phi_{\tau}(q)$, gdzie τ jest czasem pierwszego przecięcia się orbity $\Phi_t(q)$ z płaszczyzną Σ . Oczywistym jest to że punkt p przecięcia orbity γ z płaszczyzną Σ jest punktem stacjonarnym odwzorowania Poincarego.

Eksperymenty numeryczne wskazują na to że łącząc kolejne iteracje $f^{(n)}(q)$ odwzorowania $f: U_p \Rightarrow \Sigma$ za pomocą odcinków skierowanych otrzymamy obrazki bardzo przypominające dwuwymiarowe portrety fazowe. W zależności od charakteru potoku fazowego $\Phi_t(q)$ (dla którego indeks Lyapunova (2.11.1) jest wielkoscią dodatnią), trajektorie w otoczeniu punktu p będą miały charakter siodła, źródła lub ogniska niestabionego. Korzystając z tej analogii przytoczymy argumenty tłumaczące działanie algorytmu opartego na wzorze (2.11.1). Rozumowania przeprowadzimy przy załozeniu że punkt p jest "punktem siodłowym". Jak wiedomo, przy odpowiednim doborze zmiennych ukłład dynamiczny w małym otoczeniu siodła przybiera postać

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1, \ \lambda_2 > 0.$$

W takim układzie punkt *p* ma współrzędne (0, 0). Rozpatrzmy orbitę rozpoczynającą się w punkcie *q* o współrędnych (x_0 , y_0). Odległość pomiędzy orbitą $f^{(n)}(q)$ a poczatkiem współrzędnych będzie zmieniać się w czasie zgodnie ze wzorem

$$d(t) = \sqrt{x_0^2 e^{2\lambda_1 t} + y_0^2 e^{-2\lambda_2 t}} = e^{2\lambda_1 t} \sqrt{x_0^2 + y_0^2 e^{-2(\lambda_1 + \lambda_2) t}} = x_0 e^{\lambda_1 t} + O(e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) t}).$$

A więc wielkość okreslona zgodnie ze wzorem (2.11.1) będzie wynosić

$$\lambda[x_0, y_0] = \lim_{t \to \infty, d(0) \to 0} \frac{1}{t} \operatorname{Ln}\left(\frac{e^{\lambda_1 t} x_0}{d(0)} - 1\right) = \lim_{t \to \infty, d(0) \to 0} \frac{1}{t} \operatorname{Ln}\left[e^{\lambda_1 t}\left(\frac{x_0}{d(0)} - e^{-\lambda_1 t}\right)\right] = \lambda_1.$$

Zadanie. Wykazać poprawność powyższego stwierdzenia w przypadku gdy punkt stacjonarny odwzorowania Poincarego ma charakter źródła.

2.11.2. Układ Rösslera. Odwzorowanie Lorenza

Naszym najblizszym celem jest zrozumienie mechanizmu powstania kasakdy podwajania okresu. Standardowym układem trójwymiarowym w którym jest realizowany taki scenariusz jest uklad Rösslera

$$\dot{x} = -(y + z),$$
 (2.11.2)
 $\dot{y} = x + 0.2 y,$
 $\dot{z} = 0.2 + z(x - c).$

Kaskada podwajania okresu mozna zaobserwować w eksperymencie numerycznym w którym parametr *c* zmienia sie na odcinku

(2.0, 5), rys. 2.11.4.



To, w jaki sposób odbywa sie bifurkacja podwajania okresu, można przybliżyć posługująć się odwzorowaniem Poincarego. Potok fazowy układu dynamicznego generuje odwzorowanie Poincarego płaszczyzny Σ transwersalnej do orbity okresowej γ w siebie. Jeżeli γ jest orbitą stabilną, to punkty kolejnych przecięć orbity przechodzącej przez wybrany punkt q zmierazją do punktu stałego p odwzorowania Σ , tworząc analog węzła stabilnego (p. lewą panel rys. 2.11.5). Przy pewnej wartości parametra c cykl o okresie 1 T traci stabilność, ale nie znika. W jego otoczeniu pojawia się stabilny cykl o okresie $\cong 2 T$. Na płaszczyźnie Poincare podwajaniu okresu odpowiada bifurkacja widłowa (prawa panel rys. 2.11.5). Przy dalszej zmie-

nie parametru cykl okresu 2 *T*) również ulega bifurkacji podwajania. Punkty przecięcia płaszczyzny Σ przez orbitę o okresie 2 *T* ulegają przy tym bifurkacji widłowej. Proces ten następnie się powtarza, przy czym zmiany wartości parametru *c* przy których zachodzą kolejne bifurkacje podwajania stają się coraz mniejsze. Ostatecznie w skończonym obszarze przestrzeni fazowej pozostaje jedyna orbita stabilna o okresie 2[∞] *T* (orbita chaotyczna) oraz przeliczalną ilość orbit niestabilnych o okresie 2^{*n*} *T* (*n* = 1, 2,).





Przedstawiając scenariusz podwajania okresu, nie odpowiedzieliśmy na zasadnicze pytanie o tym, jaka jest geneza tych bifurkacji. Uzyskanie odpowiedzi na to pytanie poprzez analizę trójwymiarowego układu dynamicznego nie jest możliwe. Można natomiast skorzystać z zasady skracania informacji, która w danym przypadku polega na tym że informacja o charakterze rozwiązania układu trójwymiarowego zawarta jest w każdej ze składowych funkcji, na przykład x(t). Oznaczmy n – te maksimum lokalne funkcji x(t) przez x_n (p. rys. 2.11.6).



Rys. 2.11.6

Na kolejnym rysunku pokazany jest wynik przedstawienia wartości x_{n+1} jako funkcji x_n dla duzej liczby iteracji. Odwzorowanie to zaproponował E. Lorenz. Widzimy że w danym konkretnym przypadku kolejne naksima lokalne zwiazane są zależnością funkcjonalną zadaną funkcją przypominającą przewróconą parabolę.



Rys. 2.11.7

Definicja. Funkcja y=f(x), odwzorowująca odcinek $I = \langle a, b \rangle \in R$ w siebie nazywa się funkcją unimodularną, jeżeli f(a) = f(b), a ponadto istnieje $x_0 \in (a, b)$ takie że $f'|_{\langle a, x_0 \rangle} > 0$, i $f'|_{\langle x_0, b \rangle} < 0$.

Stosując translacje $x \to x + a$, $y \to y + b$ oraz skalowania $x \to \alpha x$, $y \to \beta y$, α , $\beta > 0$, każdą funkcję unimodularną można przekształcić do postaci $\overline{y} = \overline{f}(\overline{x})$ gdzie \overline{f} - funkcja unimodularna odwzorowująca odcinek < 0, 1 > w siebie taką że $\overline{f}(0) = \overline{f}(1) = 0$. Jak pokazano w pracy *N. Metropolis*, *M.L. Stein, P.R. Stein,* "On finite limit sets for transformation on the unit intrval", *Journ. Combin Theory, vol. 15:25, 1973*, każde odwzorownie unimodularne $x_{n+1} = r f(x_n), \quad f(0) = f(1) = 0$, odwzorowujące odcinek < 0, 1 > w siebie i posiadające na tym odcinku ujemna pochodną Schwarza

$$Sf = \frac{f''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f'}{f'}\right)^2.$$
 (2.11.3)

demonstruje kaskadę podwojenia okresu, przy czym przebieg zjawisk bifurkacyjnych nie zależy od wyboru funkcji f. Z uwagi na to, że znak pochodnej Schwarza jest niezmienniczy względem skalowania i translacji, analiza odwzorowania Lorenza dla układu Rösslera może byc oparta na badaniu funkcji unimodularnej określonej na odcinku < 0, 1 >. Wygodnym dla analizy reprezentantem danej klasy jest odwzorowanie logistyczne $x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$. Niżej będą przeanalizowane własności tego odwzorowania odsłaniające mechanizm powstania bifurkacji podwajania okresu.

2.11.3. Odwzorowanie logistyczne

Łatwo można przekonać się w tym, że przy $r \in (0, 4)$ odwzorowanie logistyczne

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n),$$
 (2.11.4)

odwzorowuje odcinek prostej < 0, 1 > w siebie. Zawężając się do takich wartości parametra *r*, rozpoczniemy badania odwzorowania (2.11.4) od zlokalizowania punktów stacjonarnych i analizy ich stabilności. Punkt stacjonarny określa się jako rozwiązanie równania

$$x_* = r x_* (1 - x_*). \tag{2.11.5}$$

Rozwiązanie $x_*^0 = 0$ równania (2.11.5) określa punkt stacjonarny który istnieje przy dowolnych wartościach parametru *r*. Drugie rozwiązanie tego równania, które dane jest wzorem $x_*^1 = \frac{r-1}{r}$, istnieje przy $r \in (1, 4)$. Typ stabilności punktu stacjonarnego x_* zależy od tego, czy punkty należące do dostatecznie małego otoczenia x_* zblizają czy oddalają od niego. Określa się to w terminach linearyzacji odwzorowania *f* w wybranym punkcie stacjonarnym:

$$|f[x] - f[x_*]| = |Df[x_*]| | |x - x_*| + O(|x - x_*|^2) \cong |r(1 - 2x_*)| | |x - x_*|.$$
(2.11.6)

Ponieważ D f[0] = r, więc punkt stacjonarny $x_*^0 = 0$ jest stabilny gdy $r \in (0, 1)$. Utrata stabilności następuje równocześnie z powstaniem punktu stacjonarnego x_*^1 . Linearyzując odwzorowanie w tym punkcie otrzymamy

$$|f[x] - f[x_*^1]| = |Df[x_*^1]| .$$

$$x - x_*^1 |+O(|x - x_*|^2) \cong |(2 - r)| |x - x_*^1| .$$

Zatem punkt stacjonarny x_*^1 jest stabilny gdy spełniona jest nierówność |2 - r| < 1, czyli gdy $r \in (1, 3)$.

Orbitę punktu $x_0 \in (0, 1)$, pod którą rozumiemy ciąg punktów

 $\{x_0, x_1 = f[x_0], \dots x_n = f^{(n)}[x_0], \dots\}$, wygodnie jest przedstawiać graficznie na t. zw. *diagramach Lemeraia.* Na pierwszym kroku konstrukcji diagramu punkt x_0 łączy się odcinkiem skierowanym z jego obrazem na paraboli f[x] = r x (1 - x). Ten punkt łączy się skierowanym odcinkiem poziomym z przekątną. Ponieważ "współrzędna X" punktu na przekątnej pokrywa się z $x_1 = f[x_0]$, więc łącząc go pionowym odcinkiem skierowanym z parabolą, otrzymamy $f^2[x_0]$. Powtarzając tę procedurę wielokrotnie, możemy odtworzyć orbitę punktu x_0 . Niżej procedura ta implementuje się odpowiednio dla r = 1.5, r = 2.5 oraz dla r = 3.1.



Rys. 2.11.8.

Pokazaliśmy kilka typowych *diagramaów Lemeraia*, które powstają gdy $r \in (1, 3 + \delta)$.

Na tym zbiorze wartosci parametru *r* występują następujące typy zachowań odwzorowania (2.11.5): orbita podąża monotonicznie do punktu stacjonarnego x_*^1 gdy $r \in (1, 2)$; przy $r \in (2, 3)$ iteracje zblizają się do punktu stacjonarnego zataczając spiralę; przy r > 3 gdy obydwa punkty stacjonarne x_*^{ν} , $\nu = 0$, 1, stają sie niestabilne, iteracje dążą do orbity okresowej. Zatem mamy tu do czynienia z analogiem bifurkacji Andronova-Hopfa. Przy dalszym zwiększeniu parametru *r* obserwuje się kaskadę podwajania okresu prowadzącą do chaotyzacji odwzorowania, kiedy to prawie wszystkie orbity wykładniczo szybko oddalają się od siebie.

2.11.4. Bifurkacje podwajania okresu

Zachowanie się *diagramów Lemeraia* przy wartościach *r* lekko przekraczających $r_1 = 3$ można przeanalizować rozpatrując równocześnie z $f[x_n]$ drugą iterację $f^2[x_n] = f[f[x_n]]$.

Własności odwzorowania f^2 .

Lemat 1. $f^2[x]$ posiada ekstrema lokalne w punktach $x_0 = 1/2$ oraz $x_{1,2} = f^{-1}[1/2]$. *Dowód*. Warunek konieczny ekstremum lokalnego ma następującą postać:

$$\frac{d}{dx}f^{2}(x) = f'[f(x)]f'(x) = r[1 - 2f(x)]r[1 - 2x] = 0.$$

Powyższe równanie ma trzy pierwiawtki: $x_0 = 1/2$; $x_{1,2} = f^{-1}(1/2)$, c.b.d.o.

Lemat 2. Jeżeli $f(x_*)=0$, to $f^n(x_*)=0$, n=2, 3, ... (dowód jest oczywisty).

Lemat 3. Jeżeli punkt stacjonarny x_* jest stabilny względem f, to jest on również stabilny względem f^n , n = 2, 3, ...*Dowód.* Załóżmy że $|f'(x_*)| < 1$. Wówczas

$$\left| f^{2'}(x_{*}) \right| = \left| \{ f[f(x_{*})] \}' \right| = \left| f'[f(x_{*})] f'(x_{*}) \right| = \left(\left| f'(x_{*}) \right| \right)^{2} < 1.$$

Tak samo wykazuje się stwierdzenie dla wyższych iteracji.

Lemat 4. Punkt x_*^1 , który przy r < 3 jest stabilnym punktem stacjonarnym odwzorowania f^2 , przy r > 3 staje się niestabilny ulegając bifurkacji widłowej, na skutek której kreuje się dwa stabilne punkty stacjonarne \overline{x}_1 i \overline{x}_2 ($\overline{x}_1 < x_*^1 < \overline{x}_2$) odwzorowania f^2 . Przy tym zachodzą wzory

$$f(\bar{x}_1) = \bar{x}_2;$$
 $f(\bar{x}_2) = \bar{x}_1.$ (2.11.7)

Para punktów { \overline{x}_1 , \overline{x}_2 } tworzy orbitę okresową do której dążą asymptotyczne prawie wszystkie orbity odwzorowania logistycznego gdy 3<r<1+ $\sqrt{6} \approx$ 3.449. *Szkic dowodu*. Prosty sposób znalezienia dodatkowych punktów stacjonarnyc odwzorowania f^2 polega na odrzucaniu tych pierwiastków, które to odwzorowania dzieli z f(x). W tym celu rozpatrujemy równanie ilorazowe

$$0 = \frac{f^2(x) - x}{f(x) - x}.$$
 (2.11.8)

Prawą stronę znajdziemy stosując komendy PolynomialQuotient oraz sprawdzając czy wielomiany są podzielne bez reszty, stosując komendę PolynomialReminder

Komórka 2.11.1

```
P = r^{2} (1 - x) (1 - r x (1 - x)) - 1;

Q = r (1 - x) - 1;

PolynomialQuotient[P, Q, x]

1 + r + (-r - r^{2}) x + r^{2} x^{2}

PolynomialRemainder[P, Q, x]

0
```

Tak więc równanie (2.11.8) równoważne jest równaniu

$$1 + r + (-r - r^2)x + r^2 x^2 = 0.$$

Pierwiastki tego równania dane są wzorem

$$\overline{x}_{1,2} = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}$$
. (2.11.9)

Przeanalizujmy ten wzór. Zauważmy, przede wszystkim, że rozwiąznia rzeczywiste nie istnieją gdy r<3. Przy r=3 istnieje jedyne rozwiązanie $\bar{x}_{1,2} = x_*^1$. Tak więc punkty { \bar{x}_1 , \bar{x}_2 } pojawiają się w wyniku "rozgałęienia" niezerowego punktu stacjonarnego odwzorowania f.

Wykażamy wzór (2.11.7). Z własności $f^2(\bar{x}_1) = \bar{x}_1$ wynika że:

$$f^2[f(\overline{x}_1)] = f[f^2(\overline{x}_1)] = f(\overline{x}_1).$$

Zatem $f(\bar{x}_1)$ jest punktem stacjonarnym odwzorowania f^2 , a więc zachodzi relacja $f(\bar{x}_1) \in \{0, x_*^1, \bar{x}_1, \bar{x}_2\}.$

- Równość $f(\overline{x}_1)=0$ odpada, ponieważ $f^{-1}(0) = \{0, 1\};$
- równość $f(\bar{x}_1)=x_*^1$ odpada ponieważ z tej równości wynika że

$$f^2(\bar{x}_1) = \bar{x}_1 = f(x_*^1) = x_*^1,$$

czyli $\overline{x}_1 = x_*^1$, co nie jest prawdą przy r > 3;

• $f(\bar{x}_1) \neq \bar{x}_1$ ponieważ \bar{x}_1 nie jest punktem stacjonarmym f.

Tak więc pozostaje opcja $f(\bar{x}_1) = \bar{x}_2$. Dla drugiego punktu dowód jest analogiczny.

Dla wykazania stabilności punktów { $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ } rozpatrzmy wartośi pochodnej f'(x) = r (1 - 2x) w tych punktach. Na podstawie wzoru (2.11.9) mamy:

$$f'(\bar{x}_{1,2}) = r[1 - \frac{r+1 \pm \sqrt{(r+1)(r-3)}}{r}] = -1 \pm \sqrt{(r+1)(r-3)}$$

Natomiast

$$(f^2)'(\overline{x}_{1,2}) = f'[f(\overline{x}_{1,2})] f'(\overline{x}_{1,2}) = \left(-1 + \sqrt{(r+1)(r-3)}\right) \left(-1 - \sqrt{(r+1)(r-3)}\right) = 1 - (r+1)(r-3).$$

Wielkość ta przy $r_1 = 3$ równa jest 1. Maleje ona do -1 gdy r rosnie do $r_2 = 1 + \sqrt{6} \cong$ 3.449. Powyżej r_2 punkty { $\overline{x_1}, \overline{x_2}$ } stają sie niestabilne i każdy z nich ulega bifurkacji widłowej w wyniku której powstaje cykl okresu 4. Proces ten powtarza się nieskończona ilość razy, przy czym odległość $\Delta_n = r_{n+1} - r_n$ dzielącą kolejne bifurkacje podwajania staje się coraz mniejsza i wreszcie przy wartościach r> $r_{\infty} \cong 3.5699$ iteracje stają się chaotyczne. Przejawem chaotyczności orbit jest to że sąsiadnie trajektorie wykładniczo szybko oddalają się od siebie.

Podobnie jak w przypadku ciągłym, wzajemne "przyciąganie" czy "oddalanie" się trajektorii w otoczeniu punktu $x_0 \in (0, 1)$ dyskretnego układu dynamicznego można scharakteryzować indeksem Lyapunova $\lambda(x_0)$ który określa się wzorem

$$\epsilon e^{N \lambda(x_0)} \cong \left| f^N(x_0 + \epsilon) - f^N(x_0) \right|.$$

Wzór ten w granicy $\epsilon \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ daje dokładną wartość indeksu równą

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \to \infty} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{N} \operatorname{Log} \left| \frac{f^N(x_0 + \epsilon) - f^N(x_0)}{\epsilon} \right| = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \operatorname{Log} \left| \frac{df^N(x_0)}{dx_0} \right|.$$
(2.11.10)

Zależność indeksu Lyapunova od parametru r przedstawiona jest na rys. 2.11.9.



Rys. 2.11.9.

Zauważmy, że indeks Lyapunova zbliza się do osi poziomej od dołu w tych punktach w których odwzorowanie logistyczne doznaje bifurkacji podwajania okresu. Przy $r > r_{\infty} \cong 3.5699$ wykres przemieszcza się w górną półpłaszczyznę, demonstrując równocześnie charakter oscylacyjny. Oscylacje przy których wartość indeksu "nurkuje" wielokrotnie w dolną półpłaszczyznę, odpowiadają oknom okresowości, ktore widoczne są na diagramie bifurkacyjnym przedstawionym na rys. 2.11.10.



Rys. 2.11.10

Przedstawione wyniki wskazują na to, że odwzorowanie logistyczne demonstruje kaskadę podwajania okresu, która wynika z własności superpozycji odwzorowań należących do danej klasy. Scenariusz ten przejawia się w każdyum odwzorowaniu unimodularnym spełniającym warunek (2.11.3). Zastosowanie "*zasady skracania informacji*" pozwala stwierdzić że podwajanie okresu w przypadku układu Rösslera nie jest przypadkowe. Jest ono cechą wewnętrzną każdego układu dla którego odw-zorowanie Lorenza jest funkcją unimodularną.

Literatura

1. R. H. Enns, G.C. McGurie, Nonlinear Physics with *Mathematica* for Scientists and Engineers, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2001.

2. D. Dubin, Numerical and Analytical Methods for Scientists and Engineers Using *Mathematica*, Wiley Interscience, New Jersey, 2003.

3. L. D. Landau, Je.M. Lifszyc, Mechanika, PWN, Warszawa, 1987.

4. V. I. Arnold, Metody Matematyczne Mechaniki Klasycznej, PWN, Warszawa, 1981.

5. H. Schuster, Chaos Deterministyczny, PWN, Warszawa, 1995.

6. R. K. Dodd, J.C. Eilbeck, J.D. Gibbon, H.C. Morris, Solitons and Nonlinear Wave Equations, Academic Press, New York, 1982.

7. N. Ya. Kudryashov, Analiticheskaja Teorija Neliniejnych Differentsialnych Uravnenij, Moskwa-Izhevsk, Institut Komp'juternykh Issledovanij, 2004 (in Russian). 8. J. Guckenheimer, Ph. Holmews, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer, New York, 1987.

9. B. D. Hassard, N. D. Kazarinoff and Y. H. Wan, The Hopf Bifurcation and Its Application, Cambridge University Press, New York, 1981.

10. D. A. Campbell, S. M. Marotta and T. Tanury, Nonlinear Science. An Interactive *Mathematica* Notebook, Cambridge University Press, CDR Edition, 2012.