Egzamin z Matematyki - Informatyka Stosowana I rok - 1 luty 2020

Zadania

Zad. 1 (13 pkt.)
Znajdź równania wszystkich asymptop wykresu funkcji:

$$a)\ f : x \to x \operatorname{arc\,ctg} x + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \qquad\qquad b)\ g : x \to xe^{-x^2}$$

Zad. 2 (13 pkt.) Oblicz całki:

$$a) \int \frac{1+\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx \qquad\qquad b) \int x^2 \ln(1-x) dx$$

$$c) \int \sin^2 x \cos^5 x dx \qquad\qquad d) \int \frac{dx}{1-\cos x}$$

Zad. 3 (13 pkt.) Oblicz granicę:

$$a) \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$b) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+2^n+3^{n+2}} \text{ (skorzystaj z twierdzenia o trzech ciągach)}$$

$$c) \lim_{n\to\infty} \left[(e^n - \pi^n) + n \sin\frac{1}{n}\right]$$

Zad. 4 (13 pkt.)
Dana jest funkcja:

$$f : x \to \ln(2x) + \frac{1}{\ln x}$$

a) Zbadaj monotoniczność i ekstrema funkcji f.
b) Zbadaj czy punkt $x = e$ jest punktem przegięcia funkcji f.
Zad. 5 (13 pkt.)
a) Oblicz długość krzywej $y = \arcsin\left(e^{-x}\right), x \in [0, 1]$.
b) Zbadaj zbieżność całki:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Egzamin z Matematyki - Informatyka Stosowana I rok - 1 luty 2020

Teoria

Zad. 1 (12 pkt.)
a) Znajdź wektor styczny w punkcie $A = (0, -\frac{\pi}{4}, 1)$ do krzywej

$$\begin{cases} x(t) = \arcsin(t^2 - 1) \\ y(t) = \operatorname{arc\,tg}(\frac{1}{t}) \\ z(t) = \sqrt[3]{t^2} \end{cases}$$

b) Znajdź wektor normalny płaszczyzny stycznej w punkcie $B = (e, e, 1)$ do powierzchni o równaniu

$$z + \ln\frac{1}{x} \cdot \ln\frac{y}{z} = 0$$

.
Zad. 2 (10 pkt.)
a) Oblicz: $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \arccos(\cos 3\pi)$.
b) Znajdź dziedzinę funkcji:

$$f : x \to \frac{1}{\sqrt{\arccos x - \frac{\pi}{2}}}.$$

c) Udowodnij przy pomocy indukcji, że:

$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \left(e^{-\frac{x}{3}}\right)^{(n)} = \left(-\frac{1}{3}\right)^n e^{-\frac{x}{3}}.$$

Wskazówka: Skorzystaj z rekurencyjnej definicji pochodnej rzędu $(n + 1)$.
Zad. 3 (13 pkt.)
a) Zbadaj ekstrema lokalne funkcji:

$$f : (x, y) \to e^{x-y}xy \text{ w obszarze } D = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}.$$

b) Sprawdź przy pomocy drugiej pochodnej czy funkcja $x \to \sqrt[3]{x}$ ma w punkcie $x_0 = 0$ punkt przegięcia.