Egzamin z Matematyki - Informatyka Stosowana II rok - 18 stycznia 2020

Zadania

Zad 1 (17 pkt.)
Zbadaj zbieżność oraz zbieżność bezwględną szeregów. **Uwaga**, w podpunkcie *d)* można korzystać tylko z definicji zbieżności szeregu:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{2n}}{(2n)!}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{99} \cdot 99^n}{100^n}$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n sin \frac{1}{n}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Zad 2 (16 pkt.)
a) Znajdź przedział zbieżności i sumę szeregu: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n$, a następnie oblicz $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)2^n}$.
b) Znajdź promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} (2+i)^n z^n$.
Zad 3 (16 pkt.)
a) Oblicz całkę niewłaściwą:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}.$$

b) Oblicz:

$$res_0 \frac{\sin z}{z}.$$

Zad 4 (17 pkt.)
a) Sformułuj twierdzenie Dirichleta.
b) Rozwiń w szereg Fouriera funkcję:

$$f(x) = x^2, \; |x| \leqslant \pi.$$

c) Narysuj wykres szeregu Fouriera funkcji f w zbiorze zbieżności tego szeregu.
d) Podstawiając $x = \pi$ do otrzymanego rozwinięcia oblicz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Zad 5 (17 pkt.)
a) Metodą operatorową rozwiąż problem Cauchy'ego:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = te^t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

b) Oblicz:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s-8}{s^2+8s+20}\right].$$

c) Oblicz:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t u \sin u du\right].$$

Zad 6 (17 pkt.)
a) Korzystając z uogólnienia wzoru całkowego Cauchy'ego, oblicz $\int_C \frac{dz}{(z^2+1)^2}$ gdzie $C = O(i, r)$, $0 < r < 2$ zorientowany dodatnio.
b) Korzystając ze wzorów Eulera udowodnij, że $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$.
c) Rozwiąż równanie $\cos z = 0$.