Egzamin z Matematyki - Informatyka Stosowana I rok - 7 czerwca 2019

Zadania

Zad 1 (13 pkt)

a) Uzasadnij bez liczenia potencjału, że pole wektorowe

$$\overrightarrow{F} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

jest potencjalne w obszarze $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.

b) Oblicz $\int_K \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, gdzie $K = \overline{AB}, A = (1,2), B = (2,1)$

c) Oblicz $\int_K$, gdzie K jest okręgiem o środku w punkcie $O = (0,0)$ i promieniu 1, skierowanym przeciwnie do wskazówek zegara.

Zad 2 (13 pkt)

Znajdź rozwiązanie ogólne równania

$$y' = \frac{y}{x} + 2x^2 e^{x^2},$$

a następnie znajdź całkę szczególną tego równania spełniającą warunek $y(1) = 0$

Zad 3 (13 pkt)

W równaniu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

gdzie $u = u(x,y)$ jest funkcją klasy C^2, dokonaj zamiany zmiennych

$$\begin{cases} \xi = y - x \\ \eta = 2x \end{cases}$$

Zad 4 (13 pkt)

Oblicz strumień pola wektorowego $\overrightarrow{F} = (\frac{x^2}{2}, z, x)$ przez wewnętrzną stronę powierzchni bryły Ω ograniczej powierzchniami $z = x^2 + y^2 + 1, z = 0, x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

Zad 5 (13 pkt)

Wyznacz masę bryły $\Omega = \left\{(x,y,z) : 1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9,\ z \leqslant 0\right\}$, jeżeli jej gęstość w punkcie (x,y,z) jest równa odwrotności odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.