Egzamin z Matematyki – Informatyka Stosowana I rok, 1 lutego 2010.
Teoria.

1. (12 pkt.)
a) Sformułuj twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym.
b) Wykaż zbieżność i oblicz granicę ciągu (a_n) takiego, że $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$, $n \geq 1$.

2. (12 pkt.)
a) Sformułuj twierdzenie Rolle'a.
b) Podaj geometryczną interpretację tego twierdzenia.
c) Uzasadnij korzystając z twierdzenia Rolle'a, że istnieje $c \in (-3, 2)$ takie, że $f'(c) = 0$, gdzie funkcja f dana jest wzorem $f(x) = x^2 + x - 6$.

3. (11 pkt.)
a) Sformułuj regułę de l'Hospitala.
b) Oblicz $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Egzamin z Matematyki – Informatyka Stosowana I rok, 1 lutego 2010.
Zadania.

1. (13 pkt.)
a) Znajdź równania wszystkich asymptot wykresu funkcji

$$f : x \mapsto x(\operatorname{arcctg} x - \pi).$$

b) Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3 + 4n}{n + n^3}\right)^{n^3 - 1}.$$

2. (13 pkt.) Oblicz całki
a) $\int \frac{x - \sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$,
b) $\int \sqrt{1 - 2x - x^2} dx$,
c) $\int_0^1 \ln x dx$.

3. (13 pkt.) Oblicz długość łuku krzywej

$$y = \ln \cos x, \ x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

4. (13 pkt.) a) Zbadaj wypukłość i punkty przegięcia funkcji

$$x \mapsto x^2 \ln \frac{x}{e}.$$

b) Oblicz $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + 2^n + 3^{n+2}}$.

5. (13 pkt.) Napisz równanie parametryczne i ogólne płaszczyzny zawierającej styczną w punkcie $A = (3, 0, 1)$ do krzywej o parametryzacji

$$\begin{cases} x(t) = 2 + t^2 \\ y(t) = \ln(t^3 + 2) \ , t \in (-\sqrt[3]{2}, \infty) \\ z(t) = t^2 e^{3t+3} \end{cases}$$

i jednocześnie prostopadłej do płaszczyzny stycznej w punkcie $B = (1, 1, 1)$ do powierzchni o równaniu $z + \ln \frac{x}{z} - y = 0$.