

Zadania

Zad 1 (13 pkt.)

a) Znajdź równania wszystkich asymptot wykresu funkcji

$$f : x \mapsto x \operatorname{arccot} x + 2^{\frac{1}{x}}$$

b) Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n! + 1) \cdot \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$

Zad 2 (13 pkt.) Oblicz całki

a) $\int \cos(\ln x) dx$

b) $\int \frac{\sin^5 x}{1 + \cos^2 x} dx$

c) $\int \sqrt{16 - x^2} dx$

Zad 3 (13 pkt.)

a) Zbadaj ekstrema funkcji

$$f : (x, y) \mapsto (x^2 - 2y)e^{-y}$$

b) Zbadaj wypukłość i punkty przegięcia funkcji

$$f : x \mapsto (x - 1)e^{\frac{1}{x-1}}$$

Zad 4 (13 pkt.)

a) Napisz równanie ogólne płaszczyzny stycznej w punkcie $P = (e, e, 1)$ do powierzchni o równaniu

$$z + \ln \frac{1}{x} \ln \frac{y}{z} = 0$$

b) Dana jest funkcja $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x^2y + y^2 \sin xy$. Oblicz pochodną kierunkową f w punkcie $(1, 1)$ w kierunku wektora $\vec{v} = (2, 0)$.

Zad 5 (13 pkt.) Oblicz długość łuku krzywej

$$y = 1 - \ln \cos x \quad x \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

Teoria

Zadanie 1 (12 pkt.)

a) Sformułuj II warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego

b) Korzystając z tego twierdzenia uzasadnij, że funkcja $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x$ ma minimum lokalne w $x_0 = 0$

Zadanie 2 (12 pkt.)

a) Sformułuj regułę de l'Hospitala.

b) Oblicz $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \frac{1}{x})^x$

Zadanie 3 (11 pkt.)

a) Sformułuj twierdzenie o trzech ciągach.

b) Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n + 4n}{3n - 1}$$