Egzamin z Matematyki – Informatyka Stosowana I rok, 1 lipca 2013.
Teoria.

1. (12 pkt.) Sprawdzić, że funkcje wektorowe $\overrightarrow{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{\varphi}_2(t) = \begin{bmatrix} t\ln t \\ t(1+\ln t) \end{bmatrix}$ stanowią na przedziale $(0,\infty)$ układ fundamentalny układu $\begin{cases} y_1' &= \frac{1}{t}y_2 \\ y_2' &= -\frac{1}{t}y_1 + \frac{2}{t}y_2 \end{cases}$.

2. (12 pkt.)
a) Podaj definicję pola wektorowego $\overrightarrow{F}$ w obszarze $D \subset \mathbb{R}^3$.
b) Co nazywamy potencjałem pola $\overrightarrow{F}$?
c) Podaj warunek konieczny potencjalności pola $\overrightarrow{F}$.
d) Bez znajdowania potencjału uzasadnij, że pole $\overrightarrow{F} = (yz, xz+1, xy-1)$ jest potencjalne w $\mathbb{R}^3$.
e) Bez znajdowania potencjału oblicz $\int_C yzdx + (xz+1)dy + (xy-1)dz$, gdzie C jest okręgiem o środku w punkcie $(1,2)$ i promieniu 1 skierowanym zgodnie ze wskazówkami zegara.

3. (11 pkt.)
a) Sformułuj twierdzenie Greena.
b) Podaj wzór na pole figury wynikający z twierdzenia Greena.
c) Przy pomocy tego wzoru oblicz pole koła o promieniu R.

Egzamin z Matematyki – Informatyka Stosowana I rok, 1 lipca 2013.
Zadania.

1. (13 pkt.)
a) Zbadaj ekstrema lokalne funkcji uwikłanych $x \mapsto y$ określonych równaniem $x^4 + y^2 - 4xy = 0$.
b) Uzasadnij, że równanie $x^4 + y^2 - 4xy = 0$ da się rozwikłać w $(2,4)$ i oblicz $y'(2)$.
$+y-4$

2. (13 pkt.) Znajdź rozwiązanie ogólne następującego równania

$$y' + y = y^2.$$

3. (13 pkt.) Znajdź rozwiązanie ogólne następującego równania

$$y'' + 2y' = 1 + e^{-2t}.$$

4. (13 pkt.) Wyznacz strumień pola wektorowego $\overrightarrow{F} = (2xz, -x^2y, -y^2z)$ przez wewnętrzną powierzchnię bryły Ω ograniczonej powierzchniami $2z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

5. (13 pkt.) Wyznacz masę bryły $\Omega = \{(x,y,z) : 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16\}$, jeżeli jej gęstość w punkcie (x,y,z) jest równa odwrotności odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.