Egzamin z Matematyki – Informatyka Stosowana I rok, 8 wrzesień 2006. Teoria.

1. (12 pkt.)
a) Sformułuj twierdzenie Stokesa.
b) Korzystając z twierdzenia Stokesa wyznacz cyrkulację pola wektorowego $\overrightarrow{F} = (xy^3, 1, z)$ wzdłuż krzywej K: $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, która jest skierowana przeciwnie do ruchu wskazówek zegara (patrząc z góry).

2. (11 pkt.)
a) Sformułuj twierdzenie o funkcji uwikłanej wielu zmiennych.
b) Uzasadnij, że równanie $e^{xy} = x + y + 1$ da się rozwikłać w $(0,0)$ i oblicz $y''(0)$.

3. (12 pkt.)
a) Sformułuj twierdzenie Greena i udowodnij je w przypadku obszaru normalnego względem obu osi.
b) Podaj wzór na pole figury wynikający z twierdzenia Greena.
c) Przy pomocy tego wzoru oblicz pole koła o promieniu R.

Egzamin z Matematyki – Informatyka Stosowana I rok, 8 wrzesień 2006. Zadania.

1. (13 pkt.) W równaniu różniczkowym $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, gdzie $u = u(x,y)$ jest funkcją klasy C^2 dokonaj zmiany zmiennych na

$$\begin{cases} \xi = x + ay \\ \eta = x - ay \end{cases}.$$

2. (13 pkt.) Wyznacz potencjał pola wektorowego $\overrightarrow{F} = (P, Q)$, gdzie

$$P = (1 + x + y)e^x - e^y, \ Q = e^x - (1 + x + y)e^y,$$

a następnie oblicz $\int_\Gamma P dx + Q dy$, jeżeli Γ jest krzywą o parametryzacji

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2}{\pi} \cdot \arccos t \\ y(t) = \ln(1 + t) \end{cases}, \ t \in [0, 1].$$

3. (13 pkt.) Wyznacz strumień pola wektorowego $\overrightarrow{F} = (\frac{1}{3}x^3, \frac{1}{3}y^3, 0)$ przez wewnętrzną powierzchnię bryły Ω ograniczonej powierzchniami $z = x^2 + y^2$, $z = 1$.

4. (13 pkt.) Wyznacz masę bryły Ω ograniczonej powierzchniami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$, jeżeli jej gęstość w punkcie (x, y, z) jest równa odległości tego punktu od płaszczyzny yOz.

5. (13 pkt.) Rozwiąż następujący problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} y' &= y \cos x + y^2 \cos x \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$